

## Wahrscheinlichkeit und Statistik BSc D-INFK

<b>Name:</b>	
<b>Vorname:</b>	
<b>Stud. Nr.:</b>	

---

**Das Folgende bitte nicht ausfüllen!**

Aufg.	Summe	Kontr.	Pkte.-Max.
1			10
2			10
3			10
4			10

<b>Punktetotal:</b>	
<b>Vollständigkeit:</b>	

**Siehe nächste Seite!**

# Hinweise zur Prüfung

---

**Prüfungsdauer:** 2 Stunden.

**Hilfsmittel:** 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

**Bitte beachten Sie folgende Punkte:**

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie alle Resultate durch Zwischenschritte und -rechnungen (ausser Aufgabe 1) und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

**Siehe nächste Seite!**

# Aufgaben

---

1. Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Sei  $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{4})$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Ferner nehmen wir an, dass  $E[X] = 1$ . Wie gross ist  $P[X \leq 1]$ ?

1.  $P[X \leq 1] = (\frac{3}{4})^3 \frac{7}{4}$ .
2.  $P[X \leq 1] = (\frac{3}{4})^3$ .
3.  $P[X \leq 1] = 4(\frac{1}{4})^4$ .

b) Betrachten Sie folgende Tabelle:

$X_i$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$\text{Var}[X_i]$	2	?	10	6

wo  $X_1, X_2, X_3, X_4$  unabhängig voneinander sind. Berechnen Sie  $\text{Var}[X_2]$ , gegeben, dass die Varianz von  $Z = 2X_1 + 3(X_2 - X_4)$  gleich 80 ist.

1.  $\frac{94}{3}$ .
2.  $\frac{34}{9}$ .
3. 2.

c) Sei  $X \sim \text{Geom}(p)$  und  $\text{Var}[X] = 56$ . Berechnen Sie  $p$ .

1.  $p = \frac{1}{8}$ .
2.  $p = \frac{1}{56}$ .
3.  $p = \frac{\sqrt{56}}{2}$ .

d) Eine Biologiestudentin untersucht die Augenfarbe von Fruchtfliegen. Unter jeweils 1000 Fliegen haben 20 weisse Augen, der Rest hat rote Augen. Wir fangen nun 1000 Fruchtfliegen und nehmen zufällig 200 heraus. Darunter befindet sich eine Anzahl  $W$  von Fliegen mit weissen Augen. Wie ist  $W$  verteilt?

1.  $W$  ist hypergeometrisch verteilt mit Parametern  $n = 1000, m = 200$  und  $r = 20$ .
2.  $W \sim \text{NB}(r, p)$ , mit  $r = 20$  und  $p = 1/50$ .
3.  $W \sim \text{Geom}(p)$  mit  $p = 1/50$ .

Siehe nächste Seite!

e) Die Dichte einer Zufallsvariablen  $X$  sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c + x & \text{falls } -\frac{c}{2} \leq x \leq 0, \\ c - x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{c}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Konstante  $c$ .

1.  $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .
2.  $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .
3.  $c = \frac{3}{\sqrt{2}}$ .

f) Sei  $(X_k)_k$  eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3}, & \text{für } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne den (P-f.s.) Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

1.  $\frac{1}{2}$ .
2.  $\infty$ .
3.  $\frac{7}{3}$ .

g) Aus einer Urne mit 40 roten und 80 blauen Kugeln wird 27 Mal eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt. Sei  $A$  das Ereignis, dass total mindestens 18 rote Kugeln gezogen werden. Welche Aussage ist richtig?

1.  $P[A] = \sum_{k=18}^{27} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{27-k}$ .
2. Wegen der Chebyshev-Ungleichung gilt  $P[A] \leq \frac{2}{27}$ .
3. Wegen der Chernoff-Schranke gilt  $P[A] \geq 2\left(\frac{e^1}{2^2}\right)^9$ .

h) Sei  $X$  eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$ , d.h.  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion  $M_X(t)$ .

1.  $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$  für  $t < \lambda$ .
2.  $M_X(t) = \frac{\lambda}{t - \lambda}$  für  $t > \lambda$ .
3.  $M_X(t) = \lambda$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

**Siehe nächste Seite!**

- i) Welche Aussage gilt für einen Test zum Niveau  $\alpha$ ?
1. Das Niveau  $\alpha$ , kontrolliert die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art.
  2. Je kleiner das Niveau  $\alpha$ , desto kleiner die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese  $H_0$  abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.
  3. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese beibehalten wird, wenn sie richtig ist, beträgt  $\alpha$ .
- j) Seien  $X_1, \dots, X_n$  unter  $P_\vartheta$  i.i.d. mit endlichem Erwartungswert. Ferner sei  $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$  für beliebige  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . Ist dann  $Y$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $E_\vartheta[X]$ ?
1. Diese Aussage ist falsch.
  2. Es sind zu wenig Informationen vorhanden, um eine Aussage zu machen.
  3. Diese Aussage ist richtig.

**Siehe nächste Seite!**

## 2. (10 Punkte)

Seien  $X$  und  $Y$  zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Gewichtsfunktion:

$$p(j, k) = P[X = j, Y = k] = \begin{cases} C \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } k = 2, 3, \dots \text{ und } j = 1, 2, \dots, k - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die Konstante  $C$ .
- b) Beweisen Sie dass  $X$  geometrisch verteilt mit Parameter  $1/2$  ist.
- c) Beweisen Sie, dass bedingt auf das Ereignis  $\{Y = k\}$  die Zufallsvariable  $X$  gleichverteilt auf  $\{1, \dots, k - 1\}$  ist.
- d) Berechnen Sie  $E[X]$ .
- e) Berechnen Sie  $E[Y]$  und  $\text{Var}[X]$ .

**Hinweis:** Mann kann benutzen, dass für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter  $p$  gilt

$$E[Z(Z - 1)] = \frac{2(1 - p)}{p^2}.$$

**Siehe nächste Seite!**

**3. (10 Punkte)**

Seien  $X$  und  $Y$  zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^2} & \text{für } x \geq 1, y \geq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere

$$U := \frac{X}{Y} \quad \text{und} \quad V := XY.$$

- a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F_U$  der Zufallsvariable  $U$ .
- b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F_V$  der Zufallsvariable  $V$ .
- c) Bestimmen Sie die Dichtefunktion  $f_U$  der Zufallsvariable  $U$ .
- d) Bestimmen Sie die Dichtefunktion  $f_V$  der Zufallsvariable  $V$ .

**Siehe nächste Seite!**

#### 4. (10 Punkte)

Wir haben eine Münze mit einer Seite rot und der anderen Seite blau gefärbt, und wir vermuten, dass die Münze gezinkt ist und eher auf der blauen Seite landet. Also machen wir ein Experiment, in dem wir die Münze 10 Mal werfen, und wir beobachten jeweils, ob sie auf blau landet. Gehen Sie davon aus, dass alle Würfe unabhängig voneinander sind. Sei  $X_i = 1$ , wenn der  $i$ -te Wurf auf blau landet, und sonst gleich 0.

Wir haben die folgenden Ergebnisse erhalten:

Wurf $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1

- a) Führen Sie einen Test zum Signifikanzniveau  $\alpha = 2.5\%$  durch, um festzustellen, ob die Münze gezinkt ist.

Geben Sie folgendes an:

1. das Modell,
2. die Nullhypothese,
3. die Alternativhypothese,
4. die Teststatistik,

**Hinweis:** Betrachten Sie den Likelihood-Quotienten.

$$R(x_1, \dots, x_n, \vartheta_0, \vartheta_A) := \frac{L(x_1, \dots, x_n, \vartheta_0)}{L(x_1, \dots, x_n, \vartheta_A)},$$

wo  $L(x_1, \dots, x_n, \vartheta) = P_\vartheta[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$ .

5. die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese,
  6. den Verwerfungsbereich,
  7. den beobachteten Wert der Teststatistik, sowie
  8. den Testentscheid.
- b) Wie hoch ist das kleinste Niveau, bei welchem die Nullhypothese verworfen wird (dies ist der so genannte P-Wert)?

Viel Erfolg!