Aufgaben

---

1. Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Ein Kasten enthält insgesamt 10 Äpfel, r Äpfel sind rot und der Rest ist grün. Wir nehmen zwei Äpfel aus dem Kasten gleichmässig zufällig ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei rote Äpfel gezogen werden, ist 2/9. Wie viele rote Äpfel enthält der Kasten?

1. 10
2. 5
3. 2

b) Betrachten Sie eine diskrete Zufallsvariable X mit der Gewichtsfunktion p_X gemäss folgender Tabelle:

x_i	1	-1	2
$p_X(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	?

Berechnen Sie $\mathrm{Var}[2X+5]$.

1. 6
2. 8
3. 3

c) Sei $X \sim \mathit{Geom}(1/4)$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $P(X > 30 | X > 20)$?

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$
3. $\left(\frac{3}{4}\right)^{30}$

d) Eine Biologiestudentin untersucht die Augenfarbe von Fruchtfliegen. Unter jeweils 1000 Fliegen haben 20 weisse Augen, der Rest hat rote Augen. W sei die Anzahl nötiger Untersuchungen (mit Zurücklegen), um 20 Fliegen mit weissen Augen zu finden. Was ist die Verteilung von W?

1. $W \sim \mathit{Geom}(p)$ mit $p = 1/50$.
2. W ist hypergeometrisch verteilt mit Parametern $n = 1000, m = 200$ und $r = 20$.

Siehe nächste Seite!

3. W ist negativbinomial verteilt mit Parametern $r = 20$ und $p = 1/50$.

e) Die gemeinsame Dichte $f(x, y)$ der Zufallsvariablen X und Y sei auf dem Rechteck $R := \{(x, y) : -1/2 \leq x \leq 1/2, -1 \leq y \leq 1\}$ konstant gleich c und Null ausserhalb. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

1. Man muss $c = 1$ wählen, damit $f(x, y)$ wirklich eine Dichte ist.
2. Wenn $c = \frac{1}{2}$, dann sind die Zufallsvariablen unabhängig.
3. Keine der obigen beiden Behauptungen ist richtig.

f) Die Anzahl Turbinen, die pro Woche in einer Fabrik hergestellt werden, sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 40$ und Varianz $\sigma^2 = 80$. Aus diesen Informationen man kann schliessen:

1. $P[|X - 40| < 10] \geq 0.20$.
2. X ist normalverteilt.
3. Keine dieser Aussagen ist möglich.

g) Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $Var[X_i] = \sigma^2$ haben. Sei $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt:

1. $\bar{X}_n$ konvergiert für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\mu = E[X_1]$.
2. $\bar{X}_n$ konvergiert für $n \to \infty$ P-fast sicher gegen $\mu = E[X_1]$.
3. Keine der obigen Aussagen ist im Allgemeinen richtig.

h) Sei $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$. Was gilt dann für $\Phi(-t)$?

1. $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.
2. $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.
3. $\Phi(-t) = \Phi(t)$.

i) Sei X eine Bernoulliverteilte Zufallsvariable mit Parameter $1/2$. Die momenterzeugende Funktion $M_X(t)$ von X ist:

1. $M_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-t}}{2}$ für $t \in \mathbb{R}$.
2. $M_X(t) = \frac{e^t}{2}$ für $t \in \mathbb{R}$.
3. $M_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^t}{2}$ für $t \in \mathbb{R}$.

j) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unter P_ϑ i.i.d. $\sim$ Poisson(ϑ) mit $\vartheta > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ.

1. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ lautet $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ lautet $\sum_{i=1}^{n} X_i$.
3. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ lautet $n \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Siehe nächste Seite!

2. (**10 Punkte**) Sie haben sich im Nationalpark von Guarinabo verirrt. TouristInnen machen $2/3$ aller BesucherInnen im Park aus. Wird eine TouristIn nach dem Weg gefragt, gibt sie eine korrekte Antwort mit Wahrscheinlichkeit $3/4$. Die übrigen ParkbesucherInnen sind Einheimische, und wenn sie nach dem Weg gefragt werden geben sie stets eine falsche Antwort (Antworten auf eine wiederholte Frage sind unabhängig, sogar wenn sie mehrmals an die gleiche Person gestellt wird).

a) Sie fragen eine zufällig vorbeilaufende BesucherIn, ob der Ausgang aus dem Park in östlicher oder westlicher Richtung liegt (es gibt nur einen Ausgang). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Antwort korrekt ist?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die BesucherIn, die Sie gefragt haben, eine TouristIn war, wenn Sie wissen, dass ihre Antwort falsch war?

Angenommen, die Anzahl N aller BesucherInnen im Nationalpark an einem gegebenen Tag sei eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$ (i.e. $\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, für $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$).

c) Jede Person, die den Park betritt, ist männlich mit Wahrscheinlichkeit p und weiblich mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$, unabhängig von allen anderen BesucherInnen. Seien X, resp. Y die Gesamtanzahl männlicher, resp. weiblicher BesucherInnen im Nationalpark von Guarinabo. Bestimmen Sie

$$P(X = i|N = i + j),$$

in Abhängigkeit von i und j für alle ganzzahligen $i, j \geq 0$. Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Bestimmen Sie die gemeinsame Gewichtsfunktion von X und Y, $P(X = i, Y = j)$, $i, j \geq 0$.

e) Was ist die Verteilung von X und Y? Sind sie unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Siehe nächste Seite!

3. (**10 Punkte**)

Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen, beide exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Definiere

$$U := \frac{X}{X+Y} \quad \text{und} \quad V := X + Y.$$

Seien f_U und f_V die zu U und V gehörigen Dichtefunktionen.

a) Berechnen Sie die Dichtefunktion f_U und Verteilungsfunktion F_U der Zufallsvariable U.

b) Berechnen Sie die Dichtefunktion f_V und Verteilungsfunktion F_V der Zufallsvariable V.

c) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichtefunktion $f_{(U,V)}$. Sind U und V unabhängig?

Siehe nächste Seite!

4. (**10 Punkte**) Ein pharmazeutisches Unternehmen behauptet, dass die mittlere Konzentration eines gewissen aktiven Wirkstoffes pro Tablette $40\,mg$ sei. Die Standardabweichung ist bekannt und beträgt $\sigma = 3\,mg$. Das Gesundheitsamt möchte überprüfen, dass die Angabe von $40\,mg$ im Mittel stimmt, und misst dazu den Inhalt dieses Wirkstoffes in zehn verschiedenen Tabletten, mit folgenden Ergebnissen:

Messung i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$mg\ x_i$	41.42	39.52	41.12	42.78	42.00	39.34	41.84	40.62	40.78	41.44

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 410.86$$

Nehmen Sie an, dass die gemessenen Werte unabhängig und normalverteilt sind.

a) Führen Sie einen Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ durch, um festzustellen, ob die mittlere Konzentration tatsächlich $40\,mg$ pro Tablette ist.

Geben Sie folgendes an:

1. das Modell,
2. die Nullhypothese,
3. die Alternativhypothese,
4. die Teststatistik,
5. die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese,
6. den Verwerfungsbereich,
7. den beobachteten Wert der Teststatistik, sowie
8. den Testentscheid.

Hinweis: Sie dürfen folgende Approximationen verwenden:

$$\frac{\sqrt{10}}{3} \approx 1.05 \qquad \frac{10}{3} \approx 3.33 \qquad \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0.95$$

b) Wie hoch ist das kleinste Niveau, bei welchem die Nullhypothese verworfen wird (dies ist der so genannte P-Wert)?

Viel Erfolg!