Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK
Lösung

1. **a)** 2

b) 3

c) 1

d) 3

e) 3

f) 2

g) 1

h) 2

i) 1

j) 1

2. **a)** Für $x < 0$, $F(x) = 0$. Für $0 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P(\max\{X_1, X_2\} \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) \overset{X \perp Y}{=} P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) = x^2. \end{aligned}$$

$F(x) = 1$ für $x > 1$.

Für $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = 2x$, dann

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

b) Für $x < 0$, $P(X_1 \leq x | \max\{X_1, X_2\} \geq y) = 0$. Für $0 \leq x \leq y$ gilt

$$\begin{aligned} &P(X_1 \leq x | \max\{X_1, X_2\} \geq y) \\ &= \frac{P(X_1 \leq x, \max\{X_1, X_2\} \geq y)}{P(\max\{X_1, X_2\} \geq y)} \\ &= \frac{P(X_1 \leq x, X_2 \geq y)}{1 - y^2} = \frac{x(1-y)}{1-y^2}. \end{aligned}$$

Für $y < x \leq 1$,

$$\begin{aligned} &P(X_1 \leq x | \max\{X_1, X_2\} \geq y) \\ &= \frac{P(X_1 \leq x, \max\{X_1, X_2\} \geq y)}{P(\max\{X_1, X_2\} \geq y)} \\ &= \frac{P(X_1 \leq y, X_2 \geq y) + P(y \leq X_1 \leq x)}{1 - y^2} \\ &= \frac{y(1-y) + (x-y)}{1-y^2} = \frac{y - y^2 + x - y}{1-y^2} = \frac{x - y^2}{1-y^2}. \end{aligned}$$

Für $x > 1$, $P(X_1 \leq x | \max\{X_1, X_2\} \geq y) = 1$.

c) Sei $D := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq a \leq 1 \text{ und } -2 \leq b \leq 2\} \cup \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq a \leq 2 \text{ und } -1 \leq b \leq 1\}$.

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{falls } (u,v) \in D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

d) Für $u < -1$, $F_U(u) = P(U \leq u) = 0$. Für $-1 \leq u \leq 1$,

$$F_U(u) = P(U \leq u) = \int_{-1}^{u} \int_{-2}^{2} \frac{1}{10} 1_D(u,v) dv\, ds = \frac{4(u+1)}{10}.$$

Siehe nächste Seite!

Für $1 \leq u \leq 2$

$$F_U(u) = P(U \leq u) = \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} \frac{1}{10} 1_D(u,v) dv\, ds + \int_{1}^{u}\int_{-1}^{1} \frac{1}{10} 1_D(u,v) dv\, ds = \frac{8}{10} + \frac{2(u-1)}{10}$$

und $F(u) = 1$ für u>2. Dann gilt,

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{4}{10} & \text{falls } -1 \leq u \leq 1 \\ \frac{2}{10} & \text{falls } 1 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

e)

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{falls } -2 \leq v \leq -1 \\ \frac{3}{10} & \text{falls } -1 \leq v \leq 1 \\ \frac{1}{5} & \text{falls } 1 \leq v \leq 2 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

$$f_{U,V}(0,0) = \frac{1}{10} \neq f_U(0) f_V(0) = \frac{4}{10}\frac{6}{10}.$$

Deshalb sind U und V nicht unabhängig.

Siehe nächste Seite!

3. **a)** Sei N die Anzahl der richtigen Antworten. Wir bezeichnen mit A das Ereignis, dass eine Frage richtig beantwortet ist. Wir bezeichnen mit K das Ereignis, dass der Student die Antwort auf die Frage weiss. Die Zufallsvariable N ist binomialverteilt mit Parametern 16 und $P(A)$. Es gilt,

$$P(A) = P(A|K)P(K) + P(A|K^c)P(K^c) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{7}{16}.$$

Dann gilt $E[N] = 16P(A) = 7$.

b) Aus a) $E[N] = 7$. Die Markov-Ungleichung liefert,

$$P(N \geq 14) \leq \frac{E[N]}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

c) $P(A|K^c) = \frac{1}{m}, P(A|K) = 1, P(K) = p$.

$$P(K|A) = \frac{P(A|K)P(K)}{P(A)} = \frac{p}{P(A|K)P(K) + P(A|K^c)P(K^c)} = \frac{p}{p + (1-p)/m}.$$

d) M, die Anzahl der Fragen, auf die der Student die Antwort wusste, ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern 8 und $P(K^c|A)$. Deshalb

$$P(M \geq 1) = 1 - P(M = 0) = 1 - \left(\frac{p}{p + (1-p)/m}\right)^8.$$

4. a) Die log-Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\log L(x_1,\dots,x_n;\vartheta) = \log\left(\frac{1}{\vartheta^n}\prod_{i=1}^n (1+x_i)^{-(1+\frac{1}{\vartheta})}\right)$$
$$= -n\log\vartheta - (1+\frac{1}{\vartheta})\sum_{i=1}^n \log(1+x_i).$$

Die Ableitung nach ϑ ist

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log L(x_1,\dots,x_n;\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2}\sum_{i=1}^n \log(1+x_i),$$

und das ist 0 für

$$\vartheta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(1+x_i).$$

Der ML-Schätzer für ϑ ist also gegeben durch

$$T^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(1+X_i).$$

b) Die Linearität des Erwartungswertes liefert

$$E_\vartheta[T^{(n)}] = E_\vartheta\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(1+X_i)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E_\vartheta[\log(1+X_i)] = E_\vartheta[\log(1+X_1)].$$

Nach dem Hinweis ist $Y_1 := \log(1+X_1)$ $Exp(\frac{1}{\vartheta})$-verteilt. Also ist $E[Y_1] = \vartheta$ und $\mathrm{Var}[Y_1] = \vartheta^2$. Daher gilt $E_\vartheta[T^{(n)}] = E_\vartheta[Y_1] = \frac{1}{\frac{1}{\vartheta}} = \vartheta$.

Ähnlich rechnen wir für die Varianz

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\vartheta[T^{(n)}] &= \mathrm{Var}_\vartheta\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(1+X_i)\Big] \\
&\overset{unabh.}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}_\vartheta[\log(1+X_i)] \\
&= \frac{1}{n}\mathrm{Var}_\vartheta[\log(1+X_1)] \\
&= \frac{1}{n}\mathrm{Var}_\vartheta[Y_1] = \frac{1}{n}\frac{1}{\frac{1}{\vartheta^2}} = \frac{1}{n}\vartheta^2.
\end{aligned}$$

c) Aus **b)** folgt, dass $E_\vartheta[T^{(n)}] = \vartheta$, d.h. $T^{(n)}$ ist erwartungstreu für ϑ.

d) Die Chebyshev-Ungleichung liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$P_\vartheta[|T^{(n)} - \vartheta| > \varepsilon] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}_\vartheta[T^{(n)}] = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n}\vartheta^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dies beweist die Konsistenz.