Wahrscheinlichkeit und Statistik
BSc D-INFK

Name:	
Vorname:	
Stud. Nr.:	

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufg.	Summe	Kontr.	Pkte.-Max.
1			10
2			10
3			10
4			10

Punktetotal:	
Vollständigkeit:	

Siehe nächste Seite!

Hinweise zur Prüfung

Prüfungsdauer: 2 Stunden.

Hilfsmittel: 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

Bitte beachten Sie folgende Punkte:

- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe **auf einem neuen Blatt**.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, rotem oder grünem Kugelschreiber.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, begründen Sie alle Resultate durch Zwischenschritte und -rechnungen (ausser Aufgabe 1) und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Lesen Sie alle Aufgaben durch, bevor Sie beginnen. Für eine genügende Note wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in der Ihnen zur Verfügung stehenden Zeit lösen können.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 10 A4-Seiten resp. 5 Blätter Zusammenfassung. Kein Taschenrechner!

Viel Erfolg!

Siehe nächste Seite!

Aufgaben

---

1. Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantwortete Frage 1 Punkt und pro falsche Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

a) Seien A und B beliebige Ereignisse mit $P(A \cap B) = P(A \cup B) = 1/2$. Dann gilt,

1. $P(A) = 0$.
2. $P(A) = \frac{1}{2}$.
3. $P(A) = 1$.

b) In einer Urne liegen ein roter, ein blauer und ein schwarzer Würfel. Der rote Würfel ist ein fairer Würfel, während die Wahrscheinlichkeiten für die anderen durch die folgende Tabelle gegeben sind:

k	1	2	3	4	5	6
"Blau p_k"	1/5	7/60	7/60	7/60	7/60	1/3
"Schwarz p_k"	1/4	5/32	5/32	5/32	5/32	1/8

Wir ziehen blind und gleichzeitig zwei Würfel aus der Urne und werfen sie. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, 2 als Augensumme zu kriegen?

1. $\frac{1}{12}$.
2. $\frac{1}{18}$.
3. $\frac{1}{24}$.

c) Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0, 1)$, sei Y eine Binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $(2, p)$. Wir nehmen an, dass X und Y unabhängig sind, und setzen $Z = X - 2Y$. Dann gilt,

1. $E(Z) = \frac{1-4p^2}{p}, \mathrm{Var}(Z) = (1-p)\frac{(8p^3+1)}{p^2}$.
2. $E(Z) = \frac{1}{p} - 2p, \mathrm{Var}(Z) = (1-p)\frac{(1-8p^3)}{p^2}$.
3. $E(Z) = \frac{1}{p} - 4p, \mathrm{Var}(Z) = (1-p)\frac{1-4p^3}{p^2}$.

d) Sei $X \sim U(1, 2)$ und Y eine von X unabhängige Zufallsvariable mit $P(Y = 2) = \frac{1}{4}$ und $P(Y = 1) = \frac{3}{4}$. Dann gilt,

1. $P(\frac{X}{Y} \leq 1) = \frac{1}{8}$.
2. $P(\frac{X}{Y} \leq 1) = \frac{3}{4}$.
3. $P(\frac{X}{Y} \leq 1) = \frac{1}{4}$.

Siehe nächste Seite!

e) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und sei $Y = e^X$. Was ist die Dichte $f_Y(y), y > 0$, der Zufallsvariable Y?

1. $f_Y(y) = \frac{f_X(y)}{y}$.
2. $f_Y(y) = F_X(\log(y))$.
3. $f_Y(y) = \frac{f_X(\log(y))}{y}$.

f) Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ke^{-(ax+by)}, & \text{falls } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $a, b > 0$ und k eine Konstante. Dann gilt

1. $k = \frac{1}{ab}$.
2. $k = ab$.
3. $k = a + b$.

g) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sei $a = P(X \leq 1)$ und $b = P(X \leq 2)$. Bestimmen Sie $P(-1 \leq X \leq 2)$ in Abhängigkeit von a und b.

1. $b - 1 + a$.
2. $b - a$.
3. $b - 1 - a$.

h) Welche Aussage gilt für einen Test zum Niveau α?

1. Das Niveau α kontrolliert die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art.
2. Je kleiner das Niveau α, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl sie richtig ist.
3. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese beibehalten wird, wenn sie richtig ist, beträgt α.

i) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unter P_ϑ i.i.d. mit endlichem Erwartungswert ϑ. Ferner sei $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ für beliebige $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Ist dann Y ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ?

1. Ja.
2. Nein.
3. Es sind zu wenig Informationen vorhanden, um eine Aussage zu machen.

Siehe nächste Seite!

j) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-1)}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und seien n Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ von X gegeben. Dann ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ gegeben durch

1. $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}$.
2. $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$.
3. $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i + n}$.

2. Seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen, beide gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$ und sei $X = \max\{X_1, X_2\}$.

a) Berechnen Sie die Dichtefunktion $f(x), x \in \mathbb{R}$, der Zufallsvariable X.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 \leq x | \max\{X_1, X_2\} \geq y)$ für ein gegebenes $y \in (0,1)$.

Man wählt zufällig einen Punkt $P = (U, V)$ in dem Gebiet D, siehe Abbildung 1. Daraus folgt, dass die gemeinsame Dichte von (U, V) folgende Form besitzt:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} c & \text{falls } (u,v) \in D \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

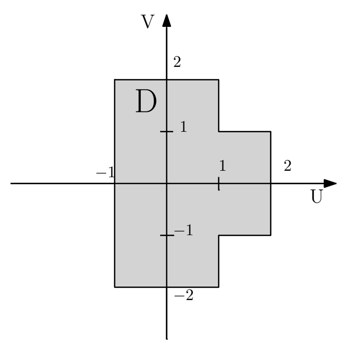

Abbildung 1: Der Punkt P wird zufällig in dem grauen Gebiet D gewählt.

c) Bestimmen Sie die Konstante c.

d) Bestimmen Sie die Randverteilungsfunktion von U und die Randichtefunktion $f_U(u)$.

e) Sind U und V unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Beim Beantworten jeder Frage eines Multiple-choice Testes weiss ein gewisser Student entweder die Antwort oder er rät sie. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Antwort weiss, und $1-p$ die Wahrscheinlichkeit, dass er rät. Wir nehmen an, dass p nicht von der Frage abhängt, und dass jede Frage m Antwortmöglichkeiten hat, von denen genau eine richtig ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Student bei einer Frage richtig rät, sei $1/m$. Wir betrachten verschiedene Fragen als unabhängig.

a) Falls die Prüfung 16 Fragen hat, jede mit 4 Antwortmöglichkeiten, und der Student weiss die Antwort zu jeder Frage mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/4$, wie gross ist dann die erwartete Anzahl an richtigen Antworten?

b) Zeigen Sie im Fall a), dass die Wahrscheinlichkeit, mindestens 14 korrekte Antworten zu haben, höchstens $1/2$ beträgt.

c) Wie gross ist für beliebiges p und m die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Student bei einer bestimmten Frage die Antwort wusste, gegeben, dass er die Frage korrekt beantwortet.

d) Der Student beantworte genau 8 Fragen des Multiple-choice Testes korrekt. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p und m die Wahrscheinlichkeit, dass er bei mindestens einer der richtig beantworteten Fragen riet.

Siehe nächste Seite!

4. Wir betrachten Pegelstände bei Hochwasser im Zürichsee. Hochwasser bedeute dabei, dass der Pegelstand die kritische Marke von 140 cm über Normalniveau überschreitet. Die Zufallsvariable X messe die Wasserhöhe in cm über der kritischen Marke. Zur Modellierung von X können wir eine sogenannte verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit Dichte

$$f_X(x;\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta}(1+x)^{-(1+\frac{1}{\vartheta})} & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

verwenden. Dabei ist ϑ ein unbekannter Parameter, der auf Basis von Daten $x_1, \ldots, x_n$ geschätzt werden soll; diese Daten werden wie üblich als Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ aufgefasst, die unter P_ϑ i.i.d. mit Dichte $f_X(x;\vartheta)$ sind, für jede Wahl des Parameters ϑ.

a) Sei $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie, dass

$$T^{(n)} = t^{(n)}(\underline{X}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\log(1+X_i)}{n}$$

der Maximum-Likelihood-Schätzer von ϑ ist.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $T^{(n)}$ in jedem Modell P_ϑ.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $Y_i := \log(1+X_i)$ $Exp(\frac{1}{\vartheta})$-verteilt ist, d.h. $f_Y(y) = \frac{1}{\vartheta}e^{-\frac{1}{\vartheta}y}$ für $y \geq 0$.

c) Ist $T^{(n)}$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ?

d) Ist die Folge von Schätzern $T^{(n)}, n \in \mathbb{N}$, konsistent?