D–INFK / D–MATH

Wahrscheinlichkeit und Statistik

401-0614-00S

Prof. Dr. Josef Teichmann

Prüfungsaufgaben

Blättern Sie erst beim Beginn der Prüfung um!

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen in das beiliegende Antwortheft.

Prüfungsaufgaben

1. Bei den folgenden 10 Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig. Es gibt pro richtig beantworteter Frage 1 Punkt und pro falscher Antwort 1/2 Punkt Abzug. Minimal erhält man für die gesamte Aufgabe 0 Punkte. **Bitte benützen Sie das beiliegende Antwortblatt.**

(a) Seien A, B und C Ereignisse mit $P[A \cap B] > 0$ und $P[C] > 0$. Wir nehmen an, dass $P[A|B] > P[A]$ und $P[A|C] > P[A]$. Dann gilt:

1. $P[A|B, C] > P[A]$.
2. $P[B] = P[C]$.
3. $P[B|A] > P[B]$.

(b) Seien X, Y, Z i.i.d $Uni(0, 1)$ verteilte Zufallsvariablen. Es gilt

1. $P[X > Y | X > Z] = \frac{2}{3}$.
2. $P[X > Y | X > Z] = \frac{1}{2}$.
3. $P[X > Y | X > Z] = \frac{1}{3}$.

(c) Sei $X \sim N(1, 3)$ und Y eine Zufallsvariable sodass $X + Y \sim N(3, 4)$. Welchen Erwartungswert hat Y?

1. $E[Y] = 1$.
2. $E[Y] = 2$.
3. Es fehlen Angaben um dies zu beantworten.

(d) Sei $X_n \sim Bin(n, \frac{1}{n})$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} P[X_n = k] = P[X = k]$ wobei

1. $X \sim Geo(1)$ verteilt ist.
2. $X \sim Poi(1)$ verteilt ist.
3. $X \sim Poi(\frac{1}{2})$ verteilt ist.

(e) Für welche Verteilung gilt $P[X > t + s|X > s] = P[X > t]$?

1. Die Poissonverteilung erfüllt $P[X > t + s|X > s] = P[X > t]$.
2. Die Normalverteilung erfüllt $P[X > t + s|X > s] = P[X > t]$.
3. Die Exponentialverteilung erfüllt $P[X > t + s|X > s] = P[X > t]$.

(f) Sei X, Y, Z Zufallsvariablen, sodass (X, Y, Z) auf $B_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ uniform verteilt ist. Das heisst die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von (X, Y, Z) ist gegeben durch

$$f(x, y, z) = \mathbf{1}_{B_1} \frac{3}{4\pi} \ .$$

Welche der folgenden ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von (X, Y) ist auf $B_1 := \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ gegeben durch

1. $g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq 1}$.
2. $g(x, y) = \frac{3}{2\pi} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq 1}$.
3. $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq 1}$.

(g) Seien $X, Y \sim N(0,1)$ verteilt und unabhängig.

1. $X^2 + Y^2$ ist $N(2,1)$ verteilt.
2. $X^2 + Y^2$ ist $Exp(\frac{1}{2})$ verteilt.
3. $X^2 + Y^2$ ist $Exp(2)$ verteilt.

(h) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unter P_θ i.i.d. $\sim N(\mu, v)$ mit $v > 0$ verteilt. Wir wollen v wie folgt schätzen

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

wobei $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

1. Dies ist der Maximum-Likelihood Schätzer.
2. Dieser Schätzer ist erwartungstreu.
3. Dies ist kein Schätzer für v.

(i) Beim testen einer Hypothese liegt ein Fehler 2. Art vor, wenn

1. die Nullhypothese zu Unrecht abgelehnt wird.
2. die Nullhypothese zu Unrecht angenommen wird.
3. der angewendete Test unzureichend ist.

(j) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unter P_θ i.i.d. $\sim$ Be(p) mit $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p.

1. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für p lautet $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für p lautet $\sum_{i=1}^{n} X_i$.
3. Der Maximum-Likelihood-Schätzer für p lautet $n \sum_{i=1}^{n} X_i$.

2. (10 Punkte) Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde innerhalb einer Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Minuten. Es gilt $Y \sim Exp(\lambda)$ mit $\lambda = -\log(0.95)$.

(a) **(1 Punkte)** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt?

(b) **(2 Punkte)** Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Minuten überlebt hat. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Minuten überlebt?

(c) **(5 Punkte)** Zeige, dass für eine Zufallsvariable Y mit Werten in $\mathbb{R}_+$ und mit einer stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte gilt

$$Y \sim Exp(p) \iff P[Y > s] = P[Y > s + t | Y > t], \qquad s, t \in \mathbb{R}_+$$

(d) **(2 Punkte)** Die Zufallsvariable Z bezeichne die Lebensdauer einer zweiten Sonde und es gelte $Z \sim Exp(\mu)$ und dass Y und Z unabhängig sind. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Sonde eine längere Lebensdauer hat, als die Erste?

3. (10 Punkte) Seien U_1, U_2, U_3 i.i.d. $Uni([0,1])$ Zufallsvariablen. Wir definieren $L = \min(U_1, U_2, U_3)$ und $M = \max(U_1, U_2, U_3)$.

(a) **(3 Punkte)** Berechne die Wahrscheinlichkeitsdichte von M.

(b) **(4 Punkte)** Berechne die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von L und M.

(c) **(3 Punkte)** Berechne die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte von L gegeben M.

4. (10 Punkte)

Wir haben einen Würfel mit sechs Seiten und wir vermuten, dass der Würfel gezinkt ist und eher auf der sechs landet. Also machen wir ein Experiment, in dem wir zehn mal Würfeln und jeweils beobachten wie er landet. Gehen Sie davon aus, dass alle Würfe unabhängig voneinander sind und dass die Wahrscheinlichkeiten eine 1,2,3,4 oder 5 zu Würfeln gleich sind. Sei $X_i = 1$, wenn der i-te Wurf eine sechs ist, und sonst gleich 0.
Wir haben die folgenden Ergebnisse erhalten:

Wurf i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0

Die Verteilungsfunktion der gegebenen Binomialverteilung in Tabelle 1 kann als Hilfsmittel verwendet werden.

(a) **(9 Punkte)** Führen Sie einen Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$ durch, um festzustellen, ob die Münze gezinkt ist.

Geben Sie folgendes an:

i. das Modell,
ii. die Nullhypothese,
iii. die Alternativhypothese,
iv. die Teststatistik,

Hinweis: Betrachten Sie den Likelihood-Quotienten.

$$R(x_1, \ldots, x_n, \theta_0, \theta_A) := \frac{L(x_1, \ldots, x_n, \theta_0)}{L(x_1, \ldots, x_n, \theta_A)},$$

wo $L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = P_\theta[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]$.

v. die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese,
vi. den Verwerfungsbereich,
vii. den beobachteten Wert der Teststatistik, sowie
viii. den Testentscheid.

(b) **(1 Punkte)** Wie hoch ist das kleinste Niveau, bei welchem die Nullhypothese verworfen wird (dies ist der so genannte P-Wert)?

Tabelle 1: Verteilungsfunktion für $X \sim \text{Bin}(k|p, n)$ mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$ gerundet

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_p[X \leq k]$	0.161	0.484	0.775	0.930	0.984	0.997	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000