Aufgaben und Lösungsvorschlag

Für jede der Subfragen von 1. und 2. ist genau eine Antwortmöglichkeit richtig.

1. Multiple choice **[7 Punkte]**

1.1. **[2 Punkte]** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der Folgenden Aussagen ist wahr:

(A) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ gilt immer.
(B) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cup B] \geq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.
(C) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.
(D) Keine dieser (Un-)gleichungen gilt immer. Sowohl „$<$“ als auch „$>$“ kann vorkommen.

Lösung:

(C) ist korrekt, weil sowohl $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[(A \setminus B)\dot{\cup} B] = \mathbb{P}[(A \setminus B)] + \mathbb{P}[B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ gilt[a] als auch $\mathbb{P}[\Omega \cup \Omega] = \mathbb{P}[\Omega] = 1 < 2 = \mathbb{P}[\Omega] + \mathbb{P}[\Omega]$ (wobei die letzte Aussage ein Beispiel dafür gibt, dass (A) im allgemeinen nicht stimmt).

Die Gleichung $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ gilt für *disjunkte* Ereignisse A und B. Im allgemeinen gilt immer „$\leq$“ und für nicht disjunkte Mengen kann auch „$<$“ auftreten.

[a] Hier haben wir verwendet das für disjunkte Ereignisse $\tilde{A}$ und B die Gleichheit $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ gilt und dass für verschachtelte Ereignisse $\tilde{A} \subseteq A$ die Ungleichung $\mathbb{P}\left[\tilde{A}\right] \leq \mathbb{P}[A]$ gilt.

1.2. **[2 Punkte]** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der Folgenden Aussagen ist wahr:

(A) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$ gilt immer.
(B) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.
(C) $\forall A, B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A \cap B] \leq \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.
(D) Keine dieser (Un-)gleichungen gilt immer. Sowohl „$<$“ als auch „$>$“ kann vorkommen.

Lösung:

(D). Beweis:

Beispiel für „$<$“: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Laplace-Modell auf $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$, dann gilt

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[\varnothing] = 0 < \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B].$$

Beispiel für „$>$“: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Laplace-Modell auf $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und $\tilde{A} = \{1, 2\}$ und $B = \{2\}$, dann gilt

$$\mathbb{P}\left[\tilde{A} \cap B\right] = \mathbb{P}[B] = \frac{1}{3} > \frac{2}{9} = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B].$$

$\square$

Die Gleichung $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ gilt *nur* für *unabhängige* Ereignisse A und B. Im allgemeinen ist sowohl „<“ als auch „>“ möglich für nicht unabhängige Ereignisse.

1.3. **[3 Punkte]** Sei $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \sim \mathcal{N}(m, 1)$ eine Folge von i.i.d. normalverteilten Zufallsvariablen mit unbekanntem Mittelwert m und bekannter Standardabweichung 1. Wir betrachten das 95%-Konfidenzintervall $I_n = [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - a_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i + a_n]$ für m mit $\mathbb{P}[m \in I_n] = 0.95$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine neue unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable $Y_{n+1} \sim \mathcal{N}(m, 1)$ im Konfidenzintervall I_n liegt, im Limes $n \to \infty$?

(A) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 0\%$.
(B) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 5\%$.
(C) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 50\%$.
(D) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 95\%$.
(E) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 100\%$.

Lösung:

(A) Die Aufgabe eines Konfidenzintervalls für m ist es mit 95% Wahrscheinlichkeit den wahren Mittelwert m zu enthalten. Es ist *nicht* die Aufgabe eines Konfidenzintervalls für m mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit neue Datenpunkte Y_i zu enthalten. Je mehr Datenpunkte man beobachtet, desto genauer kann man den Mittelwert m schätzen, somit wird a_n immer kleiner mit wachsendem n. Insbesondere wissen wir von Seite 68 des Skript, dass $a_n = \frac{c}{\sqrt{n}}$ gilt (mit $c \approx 1.96$ in diesem Fall). Somit wissen wir $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Daraus kann man schon intuitiv schließen, dass für die unabhängige normalverteilte Zufallsvariable Y_{n+1} mit verschwindend kleiner Wahrscheinlichkeit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 0\%$ in dem verschwindend kleinen Intervall I_n liegt. Beweis:

Sei $f_{\hat{m}}$ die Dichte von $\hat{m} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ und $f_{Y_{n+1}}$ die Dichte von Y_{n+1}. Für die Normalverteilungsdichte $f_{Y_{n+1}}$ gibt es offensichtlich eine obere Schranke $f_{Y_{n+1}}(m)$. Wegen der Unabhängigkeit von $\hat{m}$ und Y_{n+1}, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] &= \mathbb{P}[Y_{n+1} \in [\hat{m} - a_n, \hat{m} + a_n]] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{m}-a_n}^{\tilde{m}+a_n} f_{\hat{m},Y_{n+1}}(\tilde{m}, y)\, dy\, d\tilde{m} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{m}-a_n}^{\tilde{m}+a_n} f_{Y_{n+1}}(y) f_{\hat{m}}(\tilde{m})\, dy\, d\tilde{m} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{m}-a_n}^{\tilde{m}+a_n} f_{Y_{n+1}}(y)\, dy\, f_{\hat{m}}(\tilde{m})\, d\tilde{m} \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{m}-a_n}^{\tilde{m}+a_n} f_{Y_{n+1}}(m)\, dy\, f_{\hat{m}}(\tilde{m})\, d\tilde{m} \\
&= f_{Y_{n+1}}(m) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{m}-a_n}^{\tilde{m}+a_n} dy\, f_{\hat{m}}(\tilde{m})\, d\tilde{m} \\
&= f_{Y_{n+1}}(m) \int_{-\infty}^{\infty} 2a_n f_{\hat{m}}(\tilde{m})\, d\tilde{m} \\
&= f_{Y_{n+1}}(m) 2a_n \int_{-\infty}^{\infty} f_{\hat{m}}(\tilde{m})\, d\tilde{m} = f_{Y_{n+1}}(m) 2a_n
\end{aligned}
$$

Somit gilt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[Y_{n+1} \in I_n\right] \leq \lim_{n\to\infty} f_{Y_{n+1}}(m) 2a_n = f_{Y_1}(m) \lim_{n\to\infty} 2a_n = 0.$$

Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[Y_{n+1} \in I_n\right] = 0$. □

Diese Beweistechnik könnte man auch allgemeiner anwenden zu zeigen, dass für ein (zufälliges) Intervall J_n, dessen Länge gegen 0 konvergiert im Limes $n \to \infty$ und eine unabhängige Zufallsvariable X mit stetiger Dichte f_X immer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[X \in J_n\right] = 0$ gilt ohne, dass irgendwelche Normalverteilungs-Annahmen notwendig sind. Im Fall der gegebenen Normalverteilung $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(m,1)$ kann man sich $\mathbb{P}\left[Y_{n+1} \in I_n\right]$ auch konkret ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[Y_{n+1} \in I_n\right] &= \mathbb{P}\left[Y_{n+1} \in [\hat{m} - a_n, \hat{m} + a_n]\right] \\
&= \mathbb{P}\left[Y_{n+1} - \hat{m} \in [-a_n, a_n]\right],
\end{aligned}$$

wobei $Y_{n+1} \sim \mathcal{N}(m,1)$ und $\hat{m} \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{1}{n}\right)$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen sind.[a] Daher erhalten wir $(Y_{n+1} - \hat{m}) \sim \mathcal{N}\left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$ (mithilfe der „Properties of normal random variables“ auf Seite 50 des Skripts). Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[Y_{n+1} \in I_n\right] &= \mathbb{P}\left[Y_{n+1} - \hat{m} \in [-a_n, a_n]\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\frac{Y_{n+1} - \hat{m}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \in \left[-\frac{a_n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}, \frac{a_n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right]\right] \\
&= \Phi\left(\frac{a_n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right) - \Phi\left(-\frac{a_n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{n+1}}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sqrt{n+1}}\right),
\end{aligned}$$

mit $c \approx 1.96$. So kann man alternativ auch wegen der Stetigkeit von Φ sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[Y_{n+1} \in I_n\right] = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{n+1}}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = \Phi(0) - \Phi(0) = 0$$

gilt.

[a] Die Verteilung von $\hat{m} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ kann man sich mithilfe der „Properties of normal random variables“ auf Seite 50 des Skripts berechnen.

2. Multiple-Choice: Quadrat [6 Punkte]

Betrachte die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & 1 \leq x \leq 4 \text{ und } 1 \leq y \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.1. [**0.5 Punkte**] Sind X und Y identisch verteilt?

(A) Ja.
(B) Nein.

2.2. [**1.5 Punkte**] Sind X und Y unabhängig?

(A) Ja.
(B) Nein.

2.3. [**0.5 Punkte**] Sind X und Y i.i.d.?

(A) Ja.
(B) Nein.

2.4. [**2 Punkte**] Welche dieser Funktionen ist die Wahrscheinlichkeitsdichte f_X von X?

(A) $x \mapsto 1$ für $x \in \mathbb{R}$

(B) $x \mapsto \frac{1}{9}$ für $x \in \mathbb{R}$

(C) $x \mapsto \frac{1}{3}$ für $x \in \mathbb{R}$

(D) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{9}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 1, & \text{falls } x > 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(E) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{3}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 1, & \text{falls } x > 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(F) $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{9}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(G) $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(H) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{9}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

2.5. [**1.5 Punkte**] Welche der Funktionen aus Frage 2.4 ist die Verteilungsfunktion[1] F_X von X?

Lösung:

[1] Die Verteilungsfunktion F_X wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, kumulative (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion, **c**umulative (probability) **d**istribution **f**unction, cdf oder CDF bezeichnet.

2.1. (A). Ja, X und Y sind identisch verteilt, weil $F_X = F_Y$ (siehe die Lösungen von 2.4 und 2.5).

2.2. (A). Ja, X und Y sind unabhängig. Das folgt mithilfe von Theorem 3.14 (siehe Skript) aus $\forall x, y \in \mathbb{R} : f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ (siehe die Lösung von 2.4 für f_X).

2.3. (A). Ja, X und Y sind i.i.d.. Das folgt direkt aus 2.1 und 2.2, weil i.i.d. nichts anderes bedeutet als unabhängig (englisch ***i****ndependent*) und identisch verteilt (englisch ***i****dentically* ***d****istributed*).

2.4. (G). Die Randdichte (englisch marginal density) von X, kann wie folgt berechnet werden:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_1^4 \frac{1}{9}\mathbb{1}_{[1,4]}(x)dy = \frac{3}{9}\mathbb{1}_{[1,4]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog kann man $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } y \in [1,4] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ berechnen.

2.5. (E). Die Verteilungsfunktion F_X von X kann folgendermaßen berechnet werden:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^x \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[1,4]}(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1 \\ \int_1^x \frac{1}{3}\,d\xi, & \text{falls } x \in [1,4] \\ \int_1^4 \frac{1}{3}\,d\xi, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1 \\ \frac{x-1}{3}, & \text{falls } x \in [1,4] \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. Rot und Grün [6 Punkte]

In einer Urne befinden sich 4 rote und 2 grüne Bälle. Wir ziehen zufällig eine Kugel nach der anderen aus der Urne (ohne diese zurückzulegen) bis die Urne leer ist.

3.1. [**1.5 Punkte**] Was ist der erwartete Anteil der grünen Bällen unter den verbleibenden Bällen in der Urne nachdem wir den ersten Ball gezogen haben?

3.2. [**1.5 Punkte**] Betrachte die Reihenfolge der Farben der 6 Kugeln, wie beispielsweise „RGRRRG“ oder „GGRRRR“. Zeige das jede mögliche Reihenfolge (mit 4 „R“ und 2 „G“) mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt und berechne diese Wahrscheinlichkeit.

Hinweis: Stelle dir vor, dass jede Kugel mit einer Nummer von 1 bis 6 beschriftet ist und entferne dann diese Beschriftungen von den Kugeln sodass Kugeln der gleichen Farbe nicht mehr voneinander unterscheiden werden können.

3.3. [**1.5 Punkte**] Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel grün ist, wenn wir wissen, dass die letzte Kugel grün ist?

3.4. [**1.5 Punkte**] Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel rot ist, wenn wir wissen, dass die beiden grünen Kugeln hintereinander gezogen wurden?

Lösung:

3.1. The first ball to be removed is green with probability $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Thus, the number G of green balls in the urn after removing the first ball takes value 1 with probability $\frac{1}{3}$ or 2 with probability $\frac{2}{3}$, and so we have

$$\mathbb{E}[G] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

So, the expected proportion of balls remaining in the urn after the first removal is

$$\mathbb{E}\left[\frac{G}{5}\right] = \frac{\mathbb{E}[G]}{5} = \frac{1}{3}.$$

3.2. Label the green balls with numbers 1 and 2 and the red balls with numbers 3–6. After removing all the balls from the urn, we have that the probability of each labeled sequence, such as „314625“, is equal and given by

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6!},$$

since there are $6! = 720$ possible permutations of the labels. If we then remove the labels, we see that each unlabeled sequence such as „GRGGGR“ can be obtained from $2 \cdot 4! = 48$ labeled sequences, since the labels 1 and 2 can be swapped with each other, and so can the labels 3–6. Adding up the probabilities of all of the labeled sequences that correspond to one unlabeled sequence, we get that each unlabeled sequence occurs with the same probability

$$\frac{2 \cdot 4!}{6!} = \frac{2}{5 \cdot 6} = \frac{1}{15}.$$

3.3. Let A_1 be the event that the first ball to be removed is green, and A_2 the event that the last ball to be removed is green. There are five possible sequences such that the last ball to be removed is green, depending on when the other green ball is removed, and only one sequence „GRRRRG“ where the first and last balls are both green. Since each sequence occurs with the same probability $\frac{1}{15}$, we have that

$$\mathbb{P}[A_2] = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \frac{1}{15}.$$

So, the conditional probability is

$$\mathbb{P}[A_1 \mid A_2] = \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap A_2]}{\mathbb{P}[A_2]} = \frac{1}{5}.$$

3.4. Let B_1 be the event that the first ball to be removed is red, and B_2 the event that the two green balls are removed consecutively. There are five possible sequences where the green balls are removed consecutively, which are „GGRRRR“, „RGGRRR“, ..., „RRRRGG“. The first ball to be removed is red in all of these cases except the first one. Thus, we have

$$\mathbb{P}[B_2] = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad \text{and} \quad \mathbb{P}[B_1 \cap B_2] = \frac{4}{15}.$$

So, the conditional probability is

$$\mathbb{P}[B_1 \mid B_2] = \frac{\mathbb{P}[B_1 \cap B_2]}{\mathbb{P}[B_2]} = \frac{4}{5}.$$

4. Zwei Uniformverteilte **[5 Punkte]**

Seien $X \sim U([0,1])$ und $Y \sim U([0,2])$ zwei unabhängige Zufallsvariablen.

4.1. **[0.5 Punkte]** Berechne $\mathbb{E}[\cos(\pi X)]$.

4.2. **[1.5 Punkte]** Berechne $\mathbb{E}[\exp(X+Y)]$.

4.3. **[1.5 Punkte]** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X < Y$?

4.4. **[1.5 Punkte]** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X + Y > 2$?

Lösung:

4.1. The density function of X is $f_X(x) = 1$ for $x \in [0,1]$, so we have

$$\mathbb{E}[\cos(\pi X)] = \int_0^1 \cos(\pi x) dx = \frac{1}{\pi}[\sin(\pi x)]_{x=0}^{x=1} = 0.$$

4.2. Since X and Y are independent, the joint density function of X and Y is given by $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2}$ for $x \in [0,1]$ and $y \in [0,2]$. Thus, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(X+Y)] &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{\exp(x+y)}{2} dy\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{[\exp(x+y)]_{y=0}^{y=2}}{2} dx = \int_0^1 \frac{\exp(x+2) - \exp(x)}{2} dx \\ &= \frac{[\exp(x+2) - \exp(x)]_{x=0}^{x=1}}{2} = \frac{e^3 - e^2 - e^1 + 1}{2}.\end{aligned}$$

Alternative solution: By independence of X and Y we have that

$$\mathbb{E}[\exp(X+Y)] = \mathbb{E}[e^X e^Y] = \mathbb{E}[e^X]\mathbb{E}[e^Y] = \left(\int_0^1 e^x dx\right)\left(\int_0^2 \frac{e^y}{2} dy\right) = \frac{(e-1)(e^2-1)}{2}.$$

4.3. The event $X < Y$ occurs if and only if Y is between X and 2, so we have that

$$\mathbb{P}[X < Y] = \int_0^1 \int_x^2 \frac{1}{2} dy\, dx = \int_0^1 \frac{2-x}{2} dx = 1 - \frac{[x^2]_{x=0}^{x=1}}{4} = \frac{3}{4}.$$

Alternative solution: We have that

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X < Y] &= \int_0^2 \int_0^{\min(1,y)} \frac{1}{2} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2} dx\, dy + \int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{2} dx\, dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{2} dy + \int_1^2 \frac{1}{2} dy = \int_0^1 \frac{[y^2]_{y=0}^{y=1}}{4} y dy + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

4.4. Since X takes values in $[0,1]$, the event $\{X+Y>2\}$ can only occur if $Y \geq 1$, and so

$$\mathbb{P}[X+Y>2]=\mathbb{P}[X>2-Y]=\int_1^2\int_{2-y}^1 \frac{1}{2}dx\,dy=\int_1^2 \frac{y-1}{2}dy=\frac{[y^2]_{y=1}^{y=2}}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

5. Defekte Maschine **[6 Punkte]**

Eine Maschine ist für den durchgängigen Betrieb designt. (Somit sollte sie 7 Tage die Woche in Betrieb sein.) Aber jeden Tag gibt es eine Wahrscheinlichkeit p, dass die Maschine einen Defekt erleidet der dazu führt, dass die Maschine gestoppt und bis zum nächsten Tag repariert werden muss. Dieses Ereignis ist unabhängig davon ob die Maschine an anderen Tagen Defekte erleidet hat.

5.1. [**1.5 Punkte**] Was ist die Verteilung und die erwartete Anzahl der Defekte in einer bestimmten Woche?

5.2. [**3 Punkte**] In den letzen 500 Wochen war die Maschine

- in 320 Wochen gar nicht defekt,
- in 130 Woche an jeweils einem Tag defekt,
- in 37 Wochen an jeweils 2 Tagen defekt,
- in 11 Wochen an jeweils 3 Tagen defekt,
- in 2 Wochen an jeweils 4 Tagen defekt.

Berechne die Anzahl an Tagen an denen die Maschine defekt ist und die Anzahl an Tagen wo sie nicht defekt war, und finde den Maximum-Liklihood Schätzer (englisch MLE) $\hat{p}$ für die Wahrscheinlichkeit p.

5.3. [**1.5 Punkte**] Wir nehmen an, der MLE $\hat{p}$, den wir in Aufgabe 5.2 berechnet ist korrekt. Wie viele Maschinen brauchen wir unter dieser Annahme um zu garantieren, dass an einem Tag die Wahrscheinlich, dass alle Maschinen defekt sind kleiner als 0.01% ist?

Hinweis: Wenn du den MLE in Aufgabe 5.2 nicht gefunden hast, verwende stattdessen den Wert $\hat{p} = 8\%$.

Lösung:

5.1. Denote the weeks by $j = 1, \dots, J$ and the days of the week by $i = 1, \dots, 7$. Let $D_{i,j}$ be a random variable taking the value 1 if the machine breaks on day i of the week j, and value 0 if it does not. By the assumptions, all of the random variables $D_{i,j}$ have a Bernoulli distribution $B_j \sim \mathrm{Ber}(p)$, and they are independent. Thus, the random variables $W_j = \sum_{i=1}^{7} D_{i,j}$ representing the number of failures on a given week j have the binomial distribution $B(7, p)$, with expectation $\mathbb{E}[W_j] = 7p$.

5.2. The total number of failures is equal to

$$1 \cdot 130 + 2 \cdot 37 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 2 = 245,$$

and the number of days when the machine did not fail is

$$3500 - 245 = 3255.$$

To find the MLE, we want to consider the likelihood function for the probability $p \in (0, 1)$, with respect to the random variables $W_1, \dots, W_{500}$. The probability mass function for each random variable W_j is

$$\mathbb{P}[W_j = k] = \binom{7}{k} p^k (1 - 7p)^{1-k} = C p^k (1 - 7p)^{1-k},$$

where we use C to denote a constant[a] independent of p. Since the random variables W_j are independent , as the $D_{i,j}$ are, we obtain the likelihood function

$$\begin{aligned} L(p) &= C\Big((1-p)^7\Big)^{320}\Big(p(1-p)^6\Big)^{130}\Big(p^2(1-p)^5\Big)^{37}\Big(p^3(1-p)^4\Big)^{11}\Big(p^4(1-p)^3\Big)^2 \\ &= Cp^{245}(1-p)^{3255}. \end{aligned}$$

Taking the logarithm, we then obtain the log-likelihood function

$$l(p) = \log L(p) = C + 245\log p + 3255\log(1-p).$$

We find the MLE by differentiating l, so that the critical point $\hat{p}$ satisfies

$$l'(\hat{p}) = \frac{245}{\hat{p}} - \frac{3255}{1-\hat{p}} = 0.$$

Rearranging, we obtain the MLE

$$245(1-\hat{p}) = 3255\hat{p} \quad \Rightarrow \quad \hat{p} = \frac{245}{3500} = \frac{7}{100} = 7\%.$$

Alternative solution: If we interpret 3500 days as 3500 observations of a Bernoulli experiment with unknown parameter p, then we directly obtain the likelihood function

$$\tilde{L}(p) = p^{245}(1-p)^{3500-245}.$$

Since L in the previous suggested solution only deviates from $\tilde{L}$ by a constant factor C, the remaining calculations are analogous to the previous solution and we also obtain the same MLE $\hat{p} = 7\%$.

5.3. If we have n machines working simultaneously, the probability that all n independently fail on a given day is p^n. If we assume that $p = \hat{p} = 7\%$, we are thus looking for the smallest integer n such that

$$(0.07)^n < 10^{-4}.$$

Since $0.07 < 0.1 = 10^{-1}$, we have that $(0.07)^4 < 10^{-4}$ and so no more than 4 machines are needed . On the other hand as $7^3 = 343$, we have $(0.07)^3 = 10^{-6} \cdot 343 = 0.000343 > 0.0001$, so 3 machines are not enough. So, we conclude that $n = 4$ machines are needed.

If the value $\hat{p} = 0.08$ is used, we likewise find n such that

$$(0.08)^n < 10^{-4}.$$

Since $0.08 < 0.1 = 10^{-1}$, we have that $(0.08)^4 < 10^{-4}$ and so no more than 4 machines are needed . On the other hand as $8^3 = 512$, we have $(0.08)^3 = 10^{-6} \cdot 512 = 0.000512 > 0.0001$, so 3 machines are not enough. So, we conclude that $n = 4$ machines are needed also in this case.

[a] Within this solution we denote different constants by the same letter C, because the values of these constants are irreleavant for calculating the MSE.

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $P[Z \leq 1.96] = 0.975$.