Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. Es sei die Zufallsvariable X die Augenzahl. Dann gilt für die 4 fairen Würfel$P[X = k] = 1/6$ für $k = 1, 2, \ldots, 6$. Bei den zwei gefälschten Würfeln gilt $P[X = 6] = 3/8$ und somit $P[X = i] = 1/8$ für $i = 1, 2, \ldots, 5$.

(d.h. jede der Augenzahlen $1, \ldots, 6$ kommt mit derselben Wahrscheinlichkeit vor) und 2 Würfel gefälscht sind. Bei den gefälschten Würfeln kommt die Augenzahl 6 mit Wahrscheinlichkeit 3/8 vor und die restlichen Augenzahlen $1, \ldots, 5$ mit derselben Wahrscheinlichkeit. Die Würfel seien äusserlich nicht unterscheidbar und es werde nun zufällig ein Würfel gewählt und damit ein Mal gewürfelt.

a) Gesucht ist $P[X = 6]$. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} P[X=6] &= P[x=6, \text{gewählter Würfel war fair}] + P[X=6, \text{gewählter Würfel war gefälscht}] \\ &= P[X=6|\text{Würfel fair}]P[\text{Würfel fair}] + P[X=6|\text{Würfel gefälscht}]P[\text{Würfel gefälscht}] \\ &= \frac{1}{6}\frac{4}{6} + \frac{3}{8}\frac{2}{6} = \frac{17}{72} \end{aligned}$$

b) Sei A das Ereignis, dass der gezogene Würfel gefälscht war. Gesucht ist dann $P[A|X = 6]$. Mit der Definition der bedingten W'keit hat man

$$\begin{aligned} P[A|X=6] &= \frac{P[A \cap \{X=6\}]}{P[X=6]} = \frac{P[X=6|A]P[A]}{P[X=6]} \\ &\overset{a)}{=} \frac{\frac{3}{8}\frac{2}{6}}{\frac{17}{72}} = \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

c) T ist als Wartezeit auf den ersten Erfolg (=Würflen einer 3) also geometrisch verteilt, $T \sim geom(p)$. Also $P[T = m] = (1-p)^{m-1}p$ für $m = 1, 2, \ldots$, wobei der Erfolgsparameter gegeben ist durch

$$p = P[X=3] = P[X=3|A^c]P[A^c] + P[X=3|A]P[A] = \frac{1}{6}\frac{4}{6} + \frac{1}{8}\frac{2}{6} = \frac{11}{72}.$$

d) E[T] = 1/p, Berechnung siehe Skript S. 35.

e) Es wird in jedem Schritt zufällig ein Würfel gewählt. Gesucht ist $P[T = k]$ für $k = 1, 2, \ldots$. Sei also $k \geq 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} P[T=k] &= P[T=k|A^c]P[A^c] + P[T=k|A]P[A] \\ &= (1-p_A)^{k-1}p_A\frac{4}{6} + (1-p_{A^c})^{k-1}p_{A^c}\frac{2}{6}, \end{aligned}$$

wobei $p_A = 1/6$ und $p_{A^c} = 1/8$.

Bitte wenden!

2. **a)** i) Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{z\to\infty} F_Z(z) = \frac{1}{2} + c\int_1^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \frac{1}{2} - ce^{-\lambda s}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2} + ce^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Somit muss also gelten $c = c(\lambda) = \frac{1}{2}e^{\lambda}$.

ii) Da F_Z stückweise stetig differerenzierbar ist, existiert eine Dichte $f_Z = F_Z'$.

iii)

$$f_Z(z) = F'(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z, & 0 \leq z < 1, \\ c\lambda e^{-\lambda z} = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda(z-1)}, & z \geq 1. \end{cases}$$

b) Mittels partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^1 z^2 dz + c\lambda \int_1^\infty z e^{-\lambda z} dz \\ &= \frac{1}{3} + c\lambda\Big(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z}\Big|_1^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_1^\infty e^{-\lambda z} dz\Big) \\ &= \frac{1}{3} + ce^{-\lambda} + c(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z})\Big|_1^\infty \\ &= \frac{1}{3} + ce^{-\lambda} + \frac{c}{\lambda}e^{-\lambda} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda} \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Für $E[Z^2]$ bemerke dass aus obiger Rechnung folgt $c\int_1^\infty ze^{-\lambda z}dz = \frac{1}{\lambda}\Big(E[Z] - \frac{1}{3}\Big)$

$$\begin{aligned} E[Z^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z) dz = \int_0^1 z^3 dz + \int_1^\infty c\lambda z^2 e^{-\lambda z} dz \\ &= \frac{1}{4} + c\lambda\Big(-z^2\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z}\Big|_1^\infty + \frac{2}{\lambda}\int_1^\infty z e^{-\lambda z} dz\Big) \\ &= \frac{1}{4} + ce^{-\lambda} + \underbrace{2c\int_1^\infty z e^{-\lambda z} dz}_{=\frac{2}{\lambda}(E[Z]-\frac{1}{3})} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\lambda}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}\Big) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} Var(Z) &= E[Z^2] - (E[Z])^2 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - \Big(\frac{5}{6} + \frac{1}{2\lambda}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{18} + \frac{1}{6\lambda} + \frac{3}{4\lambda^2}. \end{aligned}$$

c) i) Sei $Y = e^Z$. Dann gilt für $y > 0$, $F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[Z \leq \log y] = F_Z(\log y)$. Somit

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < e^0 = 1 \\ \frac{1}{2}(\log y)^2, & 1 \leq y < e^1 \\ \frac{1}{2} + c\lambda\int_1^{\log y} e^{-\lambda s} ds, & y \geq e. \end{cases}$$

Für die Dichte gilt $f_Y = F_Y'$ und damit

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < e^0 = 1 \\ \frac{\log y}{y}, & 1 \leq y < e^1 \\ \frac{\lambda e^\lambda}{2} e^{-\lambda \log y} \frac{1}{y} = \frac{\lambda e^\lambda}{2} y^{-\lambda - 1}, & y \geq e. \end{cases}$$

ii)

$$P[e^2 \leq Y \leq e^4] = P[2 \leq Z \leq 4] = F_Z(4) - F_Z(2) = \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-3}\right)$$

.

3. a) Da X und Y unabhängig sind, ist die gemeinsame Dichte von (X,Y) das Produkt der Randdichten:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

b) Gesucht ist $P(X + Y \leq 1)$. Es gilt für $0 \leq x \leq 1$ und $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq 1) &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \lambda e^{-\lambda y} dx dy \\ &= \int_0^1 (1-y) \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= 1 - e^{-\lambda} - \lambda \int_0^1 y e^{-\lambda y} dy \\ &= 1 - e^{-\lambda} - \lambda \left(-\frac{y}{\lambda} e^{-\lambda y} \Big|_0^1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{-\lambda y} dy \right) \\ &= 1 - e^{-\lambda} + e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \Big|_0^1 \\ &= 1 + \frac{e^{-\lambda} - 1}{\lambda}. \end{aligned}$$

c) $Cov(X, XY) = E[X^2 Y] - E[X]E[XY] \overset{\text{unabh.}}{=} E[X^2]E[Y] - (E[X])^2 E[Y] = Var(X)E[Y].$

$$E[X] = \int_0^1 s ds = \frac{s^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 s^2 ds = \frac{s^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{b^2}{3}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{12}.$$

Damit erhalten wir also $Cov(X, XY) = Var(X)E[Y] = \frac{1}{12}\frac{1}{\lambda}$.

d) Die Likelihood Funktion L is gegeben durch

$$\begin{aligned} L((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n); \lambda) &= \prod_{i=1}^n f_{(X,Y)}(x_i, y_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda y_i} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y_i) \mathbb{1}_{[0,1]}(x_i) \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n y_i} \mathbb{1}_{\{\min y_i \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{0 \leq \min_{1 \leq i \leq n} x_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} x_i \leq 1\}}. \end{aligned}$$

Damit ist die log-likelihood Funktion $\ell = \log L$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\ell((x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n);\lambda) &= \log\left(\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^n y_i}\mathbb{1}_{\{\min y_i\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{0\leq\min_{1\leq i\leq n}x_i\leq\max_{1\leq i\leq n}x_i\leq 1\}}\right)\\ &= n\log\lambda - n\sum_{i=1}^n y_i.\end{aligned}$$

Es muss gelten: $0 \overset{!}{=} \frac{\partial\ell}{\partial\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n y_i$. Auflösen nach λ liefert $\lambda^{ML} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right)^{-1}$.