Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Wir betrachten 6 Würfel, wovon 4 Würfel fair sind (d.h. jede der Augenzahlen $1, \ldots, 6$ kommt mit derselben Wahrscheinlichkeit vor) und 2 Würfel gefälscht sind. Bei den gefälschten Würfeln kommt die Augenzahl 6 mit Wahrscheinlichkeit $3/8$ vor und die restlichen Augenzahlen $1, \ldots, 5$ mit derselben Wahrscheinlichkeit. Die Würfel seien äusserlich nicht unterscheidbar und es werde nun zufällig ein Würfel gewählt und damit ein Mal gewürfelt.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewürfelte Augenzahl eine 6 ist?

b) Nehme an, gewürfelte Augenzahl ist eine 6. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mit einem gefälschten Würfel gewürfelt wurde?

Wir wiederholen nun dieses Vorgehen, d.h. in jedem Schritt wird einer der 6 Würfel zufällig gewählt und es wird damit ein Mal gewürfelt. Es bezeichne T den Zeitpunkt, bei welchem zum ersten Mal eine 3 gewürfelt wird.

c) Was ist die Verteilung von T?

d) Berechne den Erwartungswert $E[T]$ von T.

e) Nun werde der Würfel nur beim ersten Mal zufällig gewählt und danach werde immer mit diesem Würfel gewürfelt. Berechne für diesen Fall $P(T = k), k \geq 1$.

2. (10 Punkte) Sei $\lambda > 0$ und Z eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{z^2}{2}, & 0 \leq z < 1, \\ \frac{1}{2} + c \int_1^z \lambda e^{-\lambda s} ds, & z \geq 1. \end{cases}$$

a) i) Bestimme die Konstante $c = c(\lambda)$ in Abhängigkeit von λ.

ii) Gib eine kurze Begründung, warum die Dichte f_Z von Z existiert.

iii) Berechne die Dichte f_Z.

b) Berechne den Erwartungswert $E[Z]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[Z]$ von Z.

c) Betrachte die Zufallsvariable $Y = e^Z$.

i) Berechne die Dichte f_Y von Y.

ii) Für $\lambda = 1$, berechne die Wahrscheinlichkeit, dass $e^2 \leq Y \leq e^4$.

3. (10 Punkte) Es seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen. X sei uniform verteilt auf $[0, 1]$ und Y exponential verteilt mit (vorgegebenem) Parameter $\lambda > 0$. Die Zufallsvariablen X, Y bezeichenen die Koordinaten von $Z = (X, Y)$.

a) Finde die Dichte der gemeinsamen Verteilung von (X, Y).

b) Berechne die Wahrscheinlichekeit $P(X + Y \leq 1)$.

c) Berechne die Kovarianz von X und XY.

d) Wir nehmen nun an, dass der Parameter λ *unbekannt* ist und geschätzt werden muss anhand von Daten. Für einen gegebenen Datensatz $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), \ldots, z_n = (x_n, y_n)$ der Verteilung von Z bestimme man den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.