Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. *Lösung:*

a) **Fall 1:**

$$P[R|A\ zuerst] = P[R|R_A]P[R_A] + P[R|W_A]P[W_A] = \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{13}{21}.$$

Fall 2:

$$P[R|B\ zuerst] = P[R|R_B]P[R_B] + P[R|W_B]P[W_B] = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{8}{21}.$$

b)

$$\begin{aligned} P[R] &= P[R|A\ zuerst]P[A\ zuerst] + P[R|B\ zuerst]P[B\ zuerst] \\ &= \left(\frac{13}{21}\right)p + \left(\frac{8}{21}\right)(1-p) \\ &= \frac{8+5p}{21}. \end{aligned}$$

c)

$$P[Kugel\ aus\ B|R] = P[A\ zuerst|R] = \frac{P[R|A\ zuerst]P[A\ zuerst]}{P[R]} = \frac{13p}{8+5p}.$$

d)

$$N \sim Bin(100, P[W]) = Bin(100, \frac{1}{2}).$$

$$E[N] = np = 100 * 1/2 = 50.$$

$$Var[N] = np(1-p) = 100 * 1/4 = 25.$$

2. **a)** Durch partielle Integration erhält man

$$\int te^{-t}dt = -te^{-t} - e^{-t}.$$

i)

$$1 = e^c \cdot \int_c^\infty te^{-t}dt = e^c \cdot \left(ce^{-c} + e^{-c}\right) = 1 + c.$$

Deshalb, $c = 0$.

ii)

$$P[X=0]=\frac{1}{20}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40};$$

$$P[\frac{1}{4}\le X\le\frac{3}{4}]=\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{40};$$

$$P[1<X\le 2]=e^c\cdot\int_1^2 te^{-t}dt=\frac{2}{e}-\frac{3}{e^2}$$

$$P[1\le X\le 2]=P[X=1]+P[1<X\le 2]=\frac{9}{10}-\frac{3}{e^2},$$

weil $P[X=1]=e^c\cdot\int_c^1 te^{-t}dt-\frac{1}{10}=e^c\cdot\left(\frac{1+c}{e^c}-\frac{2}{e}\right)-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}-\frac{2}{e}$.

iii) Nein, die Funktion $F_X(x)$ ist nicht stetig in $x=0$ und $x=1$.

b) i)

$$E[Y]=4\int_1^\infty\frac{\log(x)}{x^2}dx=4\cdot\left(-\frac{1}{x}\cdot\log(x)|_{x=1}^{x=\infty}+\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx\right)=$$

$$4\cdot\left(0-\frac{1}{x}|_{x=1}^{x=\infty}\right)=4.$$

$$E\left[\frac{1}{\log(Y)}\right]=4\int_1^\infty\frac{1}{x^3}dx=-2\cdot x^{-2}|_{x=1}^{x=\infty}=2.$$

ii) Für $t<1$, $F_Y(t)=0$. Für $t\ge 1$,

$$F_Y(t)=4\int_1^t\frac{\log(y)}{y^3}dy=\frac{-2\cdot\log(y)}{y^2}|_{y=1}^{y=t}+2\int_1^t\frac{dy}{y^3}=1-\frac{1}{t^2}-\frac{\log(t^2)}{t^2}.$$

Für $x<1$, $F_Z(x)=0$, und deshalb $f_Z(x)=0$. Für $x\ge 1$,

$$F_Z(x)=P[Y^2\le x]=P[-\sqrt{x}\le Y\le\sqrt{x}]=P[Y\le\sqrt{x}]=F_Y(\sqrt{x})=1-\frac{1}{x}-\frac{\log(x)}{x}.$$

Deshalb,

$$f_Z(x)=\frac{d}{dx}F_Z(x)=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\log(x)}{x}\right)=\frac{\log(x)}{x^2}.$$

3. a) Für $0\le x\le 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}f_X(x)=\int_{-\infty}^\infty f_{(X,Y)}(x,y)dy&=\lambda x\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{2}y}dy\\&=\lambda x\Big(-\frac{2}{\lambda}\Big)e^{-\frac{\lambda}{2}y}\Big|_0^\infty\\&=\lambda x\frac{2}{\lambda}=2x,\end{aligned}$$

und für $x\notin[0,1]$ haben wir

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^\infty f_{(X,Y)}(x,y)dy=0.$$

Somit gilt

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für $y\ge 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}f_Y(y)=\int_{-\infty}^\infty f_{(X,Y)}(x,y)dx&=\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}y}\int_0^1 xdx\\&=\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}y}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}y},\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und für $y < 0$ haben wir

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = 0.$$

Somit gilt

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Ja, da das Produkt der Randdichten die gemeinsame Dichte entspricht.

c) Sei A die Basisfläche. Da X eine positive Zufallsvariable ist, können wir berechnen:

$$\begin{aligned} P(A > 2) = P(\pi X^2 > 2) = P\Big(X > \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big) &= \int_{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}^{1} f_X(x)dx \\ &= x^2\Big|_{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}^{1} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

d) Sei V das Volumen des Zylinders. Wir haben:

$$\begin{aligned} E[V] = E[\pi X^2 Y] &= \pi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 y f_{(X,Y)}(x,y)dxdy \\ &= \pi\lambda \int_0^{\infty}\int_0^1 x^2 yxe^{-\frac{\lambda}{2}y}dxdy \\ &= \pi\lambda \int_0^{\infty} ye^{-\frac{\lambda}{2}y}\Big(\int_0^1 x^3 dx\Big)dy \\ &= \frac{\pi\lambda}{4}\int_0^{\infty} ye^{-\frac{\lambda}{2}y}dy \\ &= \frac{\pi\lambda}{4}\Big(-\frac{2}{\lambda}ye^{-\frac{\lambda}{2}y}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}y}dy\Big) \\ &= \frac{\pi}{\lambda}. \end{aligned}$$

e) Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$L\big((x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n);\lambda\big) = \prod_{i=1}^{n} f_{(X,Y)}(x_i,y_i) = \lambda^n e^{-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i}\prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Dann ist die log-Likelihood-Funktion gegeben durch

$$\log\Big(L\big((x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n);\lambda\big)\Big) = n\log\lambda + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Wir sollen jetzt diese Funktion bezüglich λ maximieren. Wenn man $\log L$ nach λ ableitet, erhält man die Gleichung

$$\frac{n}{\lambda} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$

Von dieser Gleichung bekommen wir endlich den Maximum-Likelihood Schätzer für λ:

$$\hat{\lambda} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} y_i}.$$