Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Wir betrachten zwei Urnen A und B. Urne A enthält 4 weisse und 2 rote Kugeln. Urne B enthält 2 weisse und 4 rote Kugel.

a) Paul zieht eine Kugel aus einer der beiden Urnen. Diese legt er in die Urne, aus der nicht gezogen wurde, und zieht dann aus dieser Urne eine neue Kugel. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Paul aus der zweiten Urne eine rote Kugel zieht, für die Fälle

Fall 1: er zieht zuerst aus Urne A,

Fall 2: er zieht zuerst aus Urne B.

b) Paul fängt mit dem Experiment aus Aufgabe **a)** nochmals von vorne an. Er zieht diesmal mit Wahrscheinlichkeit p zuerst aus Urne A und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ zuerst aus Urne B. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Paul nach Durchführung des Experiments eine rote Kugel in der Hand hält (in Abhängigkeit von p)?

c) Nachdem Paul das Experiment aus Aufgabe **b)** durchgeführt hat, hält Paul eine rote Kugel in der Hand. Was ist die Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p), dass Paul diese Kugel aus Urne B gezogen hat (d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel aus Urne A gezogen wurde, gegeben dass Paul nach dem zweiten Mal ziehen eine rote Kugel in der Hand hält)?

d) Nun legt Paul alle 12 Kugeln in Urne A und zieht dann 100 Mal nacheinander eine Kugel die er jeweils wieder zurücklegt. N entspreche der Anzahl weisser Kugeln die er in den 100 Wiederholungen gezogen hat. Bestimme die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz von N.

2. (10 Punkte)

a) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} e^c \cdot \int_c^x te^{-t}dt & x \geq 1, \\ \frac{1}{20} \cdot (1+x) & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{40} \cdot e^x & x < 0, \end{cases}$$

mit unbekannter Konstante $c \in \mathbb{R}$.

i) Welche Werte darf c annehmen?

ii) Berechnen Sie $P[X=0]$, $P[\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}]$, $P[1 < X \leq 2]$ und $P[1 \leq X \leq 2]$.

iii) Besitzt die Zufallsvariable X eine Dichtefunktion? (Begründung!)

b) Gegeben sei die Zufallsvariable Y mit Dichtefunktion

$$f_Y(x) = \begin{cases} 4 \cdot \frac{\log(x)}{x^3} & x \geq 1, \\ 0 & x \leq 1. \end{cases}$$

i) Berechnen Sie $E[Y]$ und $E[\frac{1}{\log Y}]$.

ii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von $Z = Y^2$.

3. (10 Punkte) Wir betrachten einen Zylinder, wobei der Radius der Basis durch eine positive Zufallsvariable X und die Höhe durch eine positive Zufallsvariable Y gegeben sind. Ferner sei bekannt, dass die gemeinsame Dichte von (X, Y) gegeben ist durch

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \lambda x e^{-\frac{\lambda}{2}y}, & 0 \leq x \leq 1, y \geq 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$ ein positiver Parameter ist.

a) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

b) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Basisfläche grösser als 2 wird.

d) Berechnen Sie das erwartete Volumen des Zylinders.

e) Wir nehmen jetzt an, dass der Parameter λ anhand von Daten geschätzt werden soll. Es sei ein Datensatz $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ der Verteilung von (X, Y) gegeben.

Berechnen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für λ.