Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. **a)** Sei W_j, $j \in \{1,2,3\}$, das Ereignis den Würfel j auszuwählen. Dann gilt

$$\begin{aligned} P[X=5] &= P[X=5|W_1,W_2]P[W_1,W_2] + P[X=5|W_1,W_3]P[W_1,W_3] + P[X=5|W_2,W_3]P[W_2,W_3] \\ &= \frac{5}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{31}{108}. \end{aligned}$$

b) Wir erhalten

$$\begin{aligned} P[W_1|X=5] &= \frac{P[W_1, X=5]}{P[X=5]} \\ &= \frac{P[W_1,W_2,X=5] + P[W_1,W_3,X=5]}{P[X=5]} \\ &= \frac{P[X=5|W_1,W_2]P[W_1,W_2] + P[X=5|W_1,W_3]P[W_1,W_3]}{P[X=5]} \\ &= \frac{\frac{5}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\frac{1}{3}\frac{1}{3}}{\frac{31}{108}} = \frac{75}{93}. \end{aligned}$$

c) $N \sim \mathrm{Bin}(10, P[X=5]) \sim \mathrm{Bin}(10, 31/108)$.

d) Das Paar (Y_1, X) kann die Werte $(3,5), (3,8), (6,8)$ und $(6,11)$ annehmen. Sei Y_2 die Augenzahl des zweiten Würfels. Es gilt

$$P[(Y_1,X)=(3,5)] = P[Y_1=3, Y_2=2] = \frac{5}{6}\frac{1}{2} = \frac{5}{12},$$

und analog $P[(Y_1,X)=(3,8)] = \frac{5}{12}$, $P[(Y_1,X)=(6,8)] = \frac{1}{12}$ und $P[(Y_1,X)=(6,11)] = \frac{1}{12}$.

2. **a)** i) Es muss gelten:

$$1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\mu} e^{\frac{x-\mu}{b}}dx + \frac{1}{c}\int_{\mu}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}dx.$$

Mittels Substitution $y = \frac{x-\mu}{b}$ erhält man

$$\begin{aligned} 1 &\overset{!}{=} \frac{b}{c}\int_{-\infty}^{0} e^y dy + \frac{b}{c}\int_0^{\infty} e^{-y}dy \\ &= \frac{b}{c}\left(e^y\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-y}\Big|_0^{\infty}\right) \\ &= \frac{2b}{c}, \end{aligned}$$

sodass also $c = 2b$ gelten muss (c hängt also nicht von $\mu \in \mathbb{R}$ ab).

ii) Sei $\mu = 0$. Dann gilt für die Verteilungsfunktion F_X von X

$$F_X(z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(x)dx \quad = \begin{cases} \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{z} e^{\frac{x}{b}}dx, & z < 0, \\ \frac{1}{2b}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{b}}dx + \int_0^z e^{-\left(\frac{x}{b}\right)}dx\right), & z \geq 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2b} b e^{\frac{x}{b}}\Big|_{-\infty}^{z}, & z < 0, \\ \frac{1}{2b} b e^{\frac{x}{b}}\Big|_{-\infty}^{0} - b e^{-\left(\frac{x}{b}\right)}\Big|_0^z, & z \geq 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{z}{b}}, & z < 0, \\ \frac{1}{2}\left(1 - 0 - \left(e^{-\left(\frac{z}{b}\right)} - 1\right)\right), & z \geq 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{z}{b}}, & z < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\left(\frac{z}{b}\right)}, & z \geq 0. \end{cases}$$

b) i) Die Dichte von Z erhält man aus der vorgegebenen Dichte von X wie folgt: Da $Z = e^X \geq 0$, gilt $F_Z(z) = P(Z \leq z) = 0$ für $z \leq 0$. Sei also $z > 0$, dann

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(e^X \leq z) = P(X \leq \log z) = F_X(\log z)$$

und somit

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = F_X'(\log z)\frac{1}{z} = f_X(\log z)\frac{1}{z}.$$

Also gilt:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2b}\frac{1}{z}e^{\frac{\log z}{b}} = \frac{1}{2b}z^{1/b-1}, & 0 < z < 1 \ (\Longleftrightarrow x = \log z < 0), \\ \frac{1}{2b}\frac{1}{z}e^{-\frac{\log z}{b}} = \frac{1}{2b}z^{-1/b-1}, & z \geq 1 \ (\Longleftrightarrow x \geq 0). \end{cases}$$

ii) **Variante 1:**
Der Erwartungswert von Z lässt sich berechnen durch $E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)dz$, wobei f_Z die Dichte von Z ist. Es gilt somit

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)dz \quad = \quad \frac{1}{2b}\int_0^1 z^{1/b}dz + \frac{1}{2b}\int_1^{\infty} z^{-1/b}dz$$

Wegen dem zweiten Integral müssen wir die Fälle $b \neq 1$ und $b = 1$ unterscheiden.

1) Fall $b \neq 1$: Integrieren liefert

$$E[Z] \quad = \quad \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{1/b+1}z^{1/b+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{-1/b+1}z^{-1/b+1}\Big|_1^{\infty}\right),$$

und für den Fall $b > 1$

$$E[Z] = \frac{1}{2b}\left(\underbrace{\frac{1}{1/b+1}z^{1/b+1}\Big|_0^1}_{=\frac{1}{1/b+1}} + \underbrace{\frac{1}{-1/b+1}z^{-1/b+1}\Big|_1^{\infty}}_{=\infty}\right) = \infty.$$

Für den Fall $b < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{1/b+1}z^{1/b+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{-1/b+1}z^{-1/b+1}\Big|_1^{\infty}\right) \\ &= \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{1/b+1} + \frac{1}{1/b-1}\right) = \frac{1/b^2}{(1/b+1)(1/b-1)}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

2) Fall $b = 1$:

$$\begin{aligned} E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz &= \frac{1}{2}\int_0^1 z dz + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 + \log z\Big|_1^{\infty}\right) = \infty. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also, dass $E[Z] = \infty$ für $b \geq 1$ und $E[Z] = \frac{1/b^2}{(1/b+1)(1/b-1)}$ falls $b < 1$.

Variante 2:

$$\begin{aligned} E[Z] = E[e^X] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+1/b)} dx + \frac{1}{2b}\int_0^{\infty} e^{x(1-1/b)} dx \end{aligned}$$

Restliche Rechnung und Fallunterscheidung ($b = 1$ vs. $b \neq 1$) analog zu Variante 1.

3. a) Zuerst berechnen wir die Verteilungsfunktion F_X von X:

$$\begin{aligned} F_X(u) &= P[X \leq u] = \text{Fläche}[\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0,u], 0 \leq y \leq x/L\}]/\text{Fläche}[K] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } u < 0, \\ \frac{u^2}{L^2}, & \text{wenn } u \in [0,L] \text{ und} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit, erhalten wir dass

$$f_X(u) = F_X'(u) = \begin{cases} \frac{2u}{L^2} & \text{wenn } u \in [0,L], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx = \int_0^L \frac{2x^2}{L^2}\, dx = \frac{2}{3}L.$$

b) i)

$$\begin{aligned} P[A] &= F_X(L/3) = 1/9. \\ P[B] &= \text{Fläche}[\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0,L], 0 \leq y \leq x/(2L)\}]/\text{Fläche}[K] \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P[A \cap B] &= \text{Fläche}[\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0,L/3], 0 \leq y \leq x/(2L)\}]/\text{Fläche}[K] \\ &= 1/18 = P[A]P[B]. \end{aligned}$$

und damit stellen wir fest, dass A und B unabhängig sind.

c) Gegeben $x_1, \ldots, x_k \geq 0$, die Likelihoodsfunktion $f_L(x_1, \ldots, x_k)$ ist

$$f_L(x_1, \ldots, x_k) = \Big(\prod_{i=1}^{k} \frac{2x_i}{L^2}\Big) 1_{\{x_i \leq L, \forall i = 1, \ldots, k\}}.$$

So dass die Maximum-Likelihood gleich

$$\hat{L} = \underset{L}{\text{argmax}}\ f_L(x_1, \ldots, x_k) = \min\{L \geq 0; x_i \leq L, \forall i = 1, \ldots, k\} = \max\{x_1, \ldots, x_k\}.$$