Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. *Lösung:*

a)

$$P[F] = P[S_G^c|G]P[G] + P[S_R^c|R]P[R] + P[S_B^c|B]P[B] = \frac{1}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\frac{5}{12} = \frac{7}{40}.$$

b)

$$P[S_R] = P[S_R|R]P[R] + P[S_R|G]P[G] + P[S_R|B]P[B] = \frac{9}{10}\frac{1}{4} + \frac{1}{10}\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\frac{5}{12} = \frac{3}{10}.$$

c)

$$P[R|S_R] = \frac{P[S_R|R]P[R]}{P[S_R]} = \frac{\frac{9}{10}\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{3}{4}.$$

d) i) Für die Herleitung des MLE der Poissonverteilung ist

$$\ln(L(\lambda)) = \ln\left(\prod_i^n \left(\frac{\lambda^{k_i}e^{-\lambda}}{k_i!}\right)\right)$$
$$= \sum_i^n k_i \ln(\lambda) - \lambda - \ln(k_i!).$$

Mit

$$\frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = 0,$$

erhalten wir

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_i^n k_i + n = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_i^n k_i.$$

Durch einsetzen der Daten erhalten wir

$$\hat{\lambda}^{\text{MLE}} = 6.$$

ii)

$$P[\#\text{Säcke} < 3] = e^{-6}\sum_{i=0}^{2}\frac{6^i}{i!} = e^{-6}(1+6+18) = 25e^{-6}.$$

$$\left(P[\#\text{Säcke} < 3] = e^{-4}\sum_{i=0}^{2}\frac{4^i}{i!} = e^{-4}(1+4+8) = 13e^{-4}.\right)$$

2. a) (i) Für $a, b < 1$, und

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = 2k - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X = 2k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a^k + \sum_{k=1}^{\infty} b^k = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b},$$

oder äquivalent,

$$1 = 2(a + b) - 3ab.$$

(ii) (Aus Aufgabe i) folgt dass in diesem Fall $a = 1/3$)

$$E[a^X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(a^X = a^k) a^k =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = 2k) a^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} P(X = 2k - 1) a^{2k-1} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \sum_{k=1}^{\infty} a^{3k} = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \frac{a^3}{1 - a^3}.$$

(Für $a = 1/3$ erhalten wir $E[(1/3)^X] = 4 * (1/28) = 1/7$)

b) (i)

$$\frac{\binom{5}{k} 5^{5-k}}{6^5} = \binom{k}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}.$$

(ii)

$$\left(\frac{2}{6}\right)^5 = \frac{1}{3^5}.$$

(iii) Im gesamten gibt es 6^5 mögliche Fälle. Die günstigen Fälle sind $x1234$ oder $1234x$, da x jeweils die Werte $1-6$ annehmen kann gibt es also 12 günstige Fälle, d.h. die Wahrscheinlichkeit ist gleich

$$\frac{12}{6^5}.$$

3. a) Es ist leicht zu rechnen, dass

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= C \int_0^{2\pi} y \int_0^{\infty} e^{-xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= C \int_0^{2\pi} y \Big(\frac{1}{y} e^{-xy} \Big) \Big|_0^{\infty} \, \mathrm{d}y \\ &= C \int_0^{2\pi} y \, \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = C 2\pi = 1, \end{aligned}$$

und folglich

$$C = \frac{1}{2\pi}.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Nach partieller Integration haben wir, dass

$$\begin{aligned}
f_X(x) = \int_0^{2\pi} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ye^{-xy}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\Big(-\frac{y}{x}e^{-xy}\Big)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{x}\int_0^{2\pi} e^{-xy}\,\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2\pi}{x}e^{-2\pi x} - \frac{1}{x^2}\big(e^{-xy}\big)\Big|_0^{2\pi}\right] \\
&= -\frac{1}{x}e^{-2\pi x} + \frac{1}{2\pi x^2}\big(1-e^{-2\pi x}\big) \\
&= \frac{1}{2\pi x^2} - \frac{1}{x}e^{-2\pi x}\Big(1+\frac{1}{2\pi x}\Big), \\
f_Y(y) = \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x &= \frac{y}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{y}{2\pi}.\Big(-\frac{1}{y}e^{-xy}\Big)\Big|_0^{\infty} = \frac{y}{2\pi}.\frac{1}{y} = \frac{1}{2\pi}.
\end{aligned}$$

c) Nein, da das Produkt der Randdichten nicht der gemeinsamen Dichte entspricht.

d) Da Y nur Werte in $[0, 2\pi]$ annimmt, haben wir, dass $2e^Y \geq 2$: also

$$F_{2e^Y}(a) = P\big(2e^Y \leq a\big) = 0 \quad \text{für alle } a < 2.$$

Sei jetzt $a \geq 2$. Dann haben wir, dass

$$\begin{aligned}
F_{2e^Y}(a) = P\big(2e^Y \leq a\big) &= P\Big(e^Y \leq \frac{a}{2}\Big) \\
&= P\Big(Y \leq \log\Big(\frac{a}{2}\Big)\Big) \\
&= \int_0^{\log(a/2)} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}y\Big|_0^{\log(a/2)} = \frac{1}{2\pi}\log\Big(\frac{a}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Für $a \geq 2e^{2\pi}$ haben wir $F_{2e^Y}(a) = 1$.

e) Partielle Integration nach x liefert, dass

$$\begin{aligned}
E[XY] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} y^2xe^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\big(-xye^{-xy}\big)\Big|_0^{\infty} + y\int_0^{\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-e^{-xy}\Big)\Big|_0^{\infty}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}y = 1,
\end{aligned}$$

und in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned}
E[XY^2] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} y^3xe^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\int_0^{\infty} y^2xe^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}y = \pi.
\end{aligned}$$

Andererseits haben wir

$$E[Y] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}y = \pi,$$

und folglich

$$\mathrm{Cov}(Y, XY) = E[XY^2] - E[Y]E[XY] = \pi - \pi = 0.$$