Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte)

Mit einer Maschine werden in einer Recyclinganlage Kunststoffflakes nach ihrer Farbe sortiert. 1/4 aller Flakes sind rot, 1/3 davon sind gelb und der Rest ist blau. Mit Sensoren wird nun die Farbe der Flakes ermittelt. Mit S_R, S_G und S_B wird jeweils das Ereignis bezeichnet, dass der Sensor (S) die Farbe rot (R), gelb (G) oder blau (B) registriert. In einem Test wurde die Sortiergenauigkeit der Maschine ermittelt. Daraus hat sich ergeben, dass ein rotes Flakes mit $p = 0.9$ vom Sensor richtig erkannt und mit jeweils $p = 0.05$ gelb oder blau zugeordnet wird. Gelbe und Blaue Flakes werden mit $p = 0.8$ richtig erkannt und mit jeweils $p = 0.1$ einer der anderen Farben zugeordnet.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkennt der Sensor die Farbe eines Flakes nicht richtig?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Sensor ein rotes Flake registriert?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Flake rot ist wenn ein Flake vom Sensor als rot erkannt wurde?

d) An Werktagen werden jeden Morgen neue Flakes in jeweils gleichschweren Säcken angeliefert. In den letzten zwei Wochen wurde registriert, wieviele Säcke pro Tag angeliefert wurden. Es wird angenommen, dass die Anzahl der angelieferten Säcke pro Tag Poisson verteilt ist mit Parameter λ und die Wochentage als unabhängig angesehen werden können. Untenstehende Tabelle gibt an, wieviele Säcke pro Tag geliefert wurden.

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Mo	Di	Mi	Do	Fr
8	3	4	2	8	6	5	10	10	4

i) Leiten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter λ einer Poissonverteilung her und schätzen sie den Parameter anhand der gegebenen Daten.

ii) Geben Sie für den obigen Schätzer von λ die Wahrscheinlichkeit an, dass an einem Tag weniger als 3 Säcke geliefert werden (falls Sie in Aufgabe **d)**i) kein Resultat erhalten haben, rechnen Sie mit $\hat{\lambda} = 4$).

2. (10 Punkte)

a) Sei X eine Zufallsvariable, die nur positive ganzahlige Werte annimmt. Seien $a, b > 0$ positive Konstanten. Es wird angenommen dass $P(X = 2k) = a^k$ und $P(X = 2k - 1) = b^k$, für alle $k = 1, 2, ...$

(i) Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen, damit P ein Wahrscheinlichkeitsmass ist.

(ii) Sei, $a = b < 1$. Berechnen Sie den Erwartungswert $E[a^X]$.

Hinweis: $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$, für $0 \leq x < 1$, und $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \infty$, für $x \geq 1$.

b) Ein fairer Würfel (6 Seiten beschriftet mit den Ziffern $1, \ldots, 6$) wird zufällig 5 Mal in Folge geworfen.

(i) Geben Sie für $k = 0, \ldots, 5$ jeweils die Wahrscheinlichkeit an, dass die Ziffer 6 genau k

Bitte wenden!

mal erscheint.
(ii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur die Ziffern 1 und 2 erscheinen?
(iii) Was ist die Wahrscheinlichkeit dass in den 5 Würfen nacheinander 1234 gewürfelt wird?

3. (10 Punkte) Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} Cye^{-xy}, & x \geq 0,\ y \in [0, 2\pi], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist.

a) Bestimmen Sie C, so dass $f_{(X,Y)}$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist.

b) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.
Hinweis: Für die Berechnung der Integrale kann die partielle Integration verwendet werden.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

c) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $2e^Y$.
(*Hinweis*: Beachten Sie, dass Y nur Werte auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ annimmt.)

e) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(Y, XY)$.