

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc, 2.VD D-ITET)

1. (9 Punkte) Wir betrachten zwei Urnen A und B. Urne A enthält 2 weisse und 3 schwarze Kugeln, Urne B enthält 1 weisse und 2 schwarze Kugeln. Es werden nun zufällig 2 Kugeln aus Urne A gezogen und in Urne B gelegt. Danach werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen aus Urne B gezogen. Sei Y die Anzahl der weissen Kugeln, die aus Urne B gezogen wurden.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $Y = 2$.
- b) Berechnen Sie für $k = 0, 1, 2$ die Wahrscheinlichkeit, dass von den zwei aus A gezogenen Kugeln genau k weiss waren, falls $Y = 2$.
- c) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y .

2. (11 Punkte) Sei V das zufällige Volumen eines Würfels mit Kantenlänge L . V habe für eine Konstante $c > 0$ die Dichte

$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ c & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{2c}{x^2} & (x > 1) \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie c .
 - b) Berechnen Sie die Dichte und den Erwartungswert von L .
 - c) Seien Z_1 bzw. Z_2 die Volumina von Zylindern mit Grundflächen $\frac{1}{4}$ bzw. 4 und Höhe L . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Volumen V zwischen Z_1 und Z_2 liegt.
 - d) Existiert der Erwartungswert von V ? (Begründung!)
3. (9 Punkte) Seien U und V zwei unabhängige Zufallsvariablen, wobei U gleichverteilt ist auf dem Intervall $[1, 3]$ und V exponentialverteilt ist mit Parameter 3. Wir definieren $X := 2V - U$, $Y := UV$ und $Z := V/U$.

Sie dürfen Folgendes verwenden: Eine Zufallsvariable, die exponentialverteilt ist mit Parameter λ , hat Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$ und Varianz $\frac{1}{\lambda^2}$.

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .
- b) Berechnen Sie die Kovarianz von V und Y .
- c) Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis $\{Z \leq \frac{1}{2}\}$? (Ausdrücke wie $e^{-\frac{3}{4}}$ dürfen Sie im Endresultat stehen lassen.)