Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. a) Die Konstante c muss so gewählt sein, dass $c\int_0^\infty t^2e^{-t}\,dt = 1$. Mit partieller Integration erhält man:

$$\int_0^\infty t^2e^{-t}\,dt = \big[-t^2e^{-t}\big]_0^\infty + \int_0^\infty 2te^{-t}\,dt = 0 + \big[-2te^{-t}\big]_0^\infty + \int_0^\infty 2e^{-t}\,dt = 2.$$

Daher ist $c = \frac{1}{2}$.

b) Aus der obigen Berechnung sieht man, dass

$$E\big[1/R\big] = \frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-t}\,dt = \frac{1}{2}.$$

Ebenfalls mit partieller Integration und der Berechnung in a) findet man:

$$E[R] = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^3e^{-t}\,dt = \big[-\frac{1}{2}t^3e^{-t}\big]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty 3t^2e^{-t}\,dt = 0+3.$$

Ahnlich findet man:

$$E[R^2] = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^4e^{-t}\,dt = \big[-\frac{1}{2}t^4e^{-t}\big]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty 4t^3e^{-t}\,dt = 4E[R] = 12.$$

Die beste lineare Prognose von Φ durch R hat die Form $aR+b$. Laut Skript gilt:

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(R,1/R)}{\mathrm{Var}(R)}, \quad b = E[1/R] - aE[R].$$

und

$$\mathrm{Cov}(R,1/R) = E\big[R\,\frac{1}{R}\big] - E[R]E[1/R] = 1 - 3/2 = -1/2.$$
$$\mathrm{Var}(R) = E[R^2] - E[R]^2 = 12 - 9 = 3.$$

Also $a = -\frac{1}{6}$ und $b = 1$.

c) Verteilungsfunktion von $1/R$: für $x > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} P[1/R \le x] = P[R \ge 1/x] &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{x}}^\infty t^2e^{-t}\,dt \\ &= \big[-\frac{1}{2}t^2e^{-t}\big]_{\frac{1}{x}}^\infty + \int_{\frac{1}{x}}^\infty te^{-t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} + \int_{\frac{1}{x}}^\infty e^{-t}\,dt \\ &= \big(\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\big)e^{-\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Die Dichte ist die Ableitung der Verteilungsfunktion, also:

$$f_{\frac{1}{R}}(x) = \frac{d}{dx}P[1/R \le x] = \frac{1}{2}\frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}, \text{ für } x > 0.$$

Alternativ kann man auch $g(x) = 1/x$ setzen und da g monoton ist, gilt auf $\{x > 0\}$:

$$f_{\frac{1}{R}}(x) = \left|\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}\right| f_R(g^{-1}(x)).$$

2. **a)** Es sei U die Zufallsvariable, die die gewählte Urne bezeichnet. Somit ist $P[U = A] = p$ und $P[U = B] = 1 - p$. Mit X bezeichnen wir die Farbe der gewählten Kugel. Somit gilt $P[X = w|U = A] = \frac{1}{5}$ und $P[X = w|U = B] = \frac{3}{5}$. Daher erhält man mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit,

$$\begin{aligned} p_W(p) = P[X = w] &= P[X = w|U = A]P[U = A] + P[X = w|U = B]P[U = B] \\ &= \frac{1}{5}p + \frac{3}{5}(1 - p) \\ &= \frac{1}{5}(3 - 2p). \end{aligned}$$

b) Es seien $X_1, \dots, X_{10}$ die unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen, die die Farben der gewählten Kugeln bezeichnen, und

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{10}) = (w, s, w, s, s, s, w, s, w, w)$$

die gegebene Folge. Dann ist $P[X_i = w] = p_W(p)$ und $P[X_i = s] = 1 - p_W(p)$, $i = 1, \dots, 10$ und aus der Unabhängigkeit der X_i folgt

$$P[(X_1, \dots, X_{10}) = \mathbf{x}] = \prod_{i=1}^{10} P[X_i = x_i] = p_W(p)^5 \left(1 - p_W(p)\right)^5.$$

Die Likelihoodfunktion $L(p, \mathbf{x})$ ist somit

$$L(p, \mathbf{x}) = p_W(p)^5 \left(1 - p_W(p)\right)^5.$$

Um $\log L(p, \mathbf{x})$ zu maximieren, differenzieren wir nach p:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \log L(p, \mathbf{x}) &= \frac{d}{dp} \left(5 \log p_W(p) + 5 \log(1 - p_W(p))\right) \\ &= -\frac{2}{p_W(p)} + \frac{2}{1 - p_W(p)}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{(dp)^2} \log L(p, \mathbf{x}) = -\frac{4}{5p_W(p)^2} - \frac{4}{5(1 - p_W(p))^2} < 0.$$

Die Funktion $L(., \mathbf{x})$ ist also strikt konkav und erreicht ihr Maximum an der Stelle $\hat{p}$, falls $\hat{p} \in (0, 1)$ die Gleichung $-\frac{2}{p_W(\hat{p})} + \frac{2}{1-p_W(\hat{p})} = 0$ erfüllt. Lösen wir diese Gleichung nach $\hat{p}$ auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned} p_W(\hat{p}) &= (1 - p_W(\hat{p})) \\ \Leftrightarrow p_W(\hat{p}) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5}(3 - 2\hat{p}) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \hat{p} &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Somit ist der Maximum Likelihood Schätzer für p gleich $\hat{p} = \frac{1}{4}$.

3. Wir bezeichnen mit "$2 \times s, 1 \times w$" das Ereignis, dass zwei schwarze und eine weisse Kugel gezogen werden und wie in Aufgabe 2 mit U die gewählte Urne. Dann gilt

$$P[2 \times s, 1 \times w|U = A] = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5},$$

sowie

$$P[2 \times s, 1 \times w|U = B] = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Daher folgt aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit,

$$\begin{aligned}P[2\times s, 1\times w] &= P[2\times s, 1\times w|U=A]P[U=A] + P[2\times s, 1\times w|U=B]P[U=B]\\ &= \frac{6}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

4. a) Es ist $P[T_A \le t] = 1-e^{-\lambda_A t}$ und $P[T_B \le t] = 1-e^{-\lambda_B t}$. Wegen $T=\min(T_A,T_B)$ folgt

$$\begin{aligned}P[T\le t] &= 1-P[\min(T_A,T_B)>t] = 1-P[T_A>t, T_B>t]\\ &= 1-P[T_A>t]P[T_B>t] = 1-e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t}.\end{aligned}$$

Also ist T exponentialverteilt mit

$$E[T]=\int_0^\infty t(\lambda_A+\lambda_B)e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t}dt=\frac{1}{\lambda_A+\lambda_B}.$$

b)

$$\begin{aligned}P[T_A>t|T\le t] &= \frac{P[\{T_A>t\}\cap\{T\le t\}]}{P[T\le t]}=\frac{P[T_A>t, T_B\le t]}{P[T\le t]}=\frac{P[T_A>t]P[T_B\le t]}{P[T\le t]}\\ &= \frac{e^{-\lambda_A t}(1-e^{-\lambda_B t})}{1-e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t}}.\end{aligned}$$

c) Für die exponentialverteilte Zufallsvariable T_A mit Parameter λ_A gilt zunächst

$$E[T_A^2]=\int_0^\infty t^2\lambda_A e^{-\lambda_A t}dt=\frac{1}{\lambda_A^2}\int_0^\infty u^2e^{-u}du=\frac{1}{\lambda_A^2}\int_0^\infty 2ue^{-u}du=\frac{2}{\lambda_A^2}$$

und damit

$$\mathrm{Var}[T_A]=E[T_A^2]-E[T_A]^2=\frac{1}{\lambda_A^2}.$$

Wegen der Unabhängigkeit von T_A und T_B folgt

$$\mathrm{Var}[T_A-T_B]=\mathrm{Var}[T_A]+\mathrm{Var}[T_B]=\frac{1}{\lambda_A^2}+\frac{1}{\lambda_B^2}.$$

Weiter ist $|T_A-T_B|=T_A+T_B-2\min(T_A,T_B)=T_A+T_B-2T$ und daher

$$E[|T_A-T_B|]=\frac{1}{\lambda_A}+\frac{1}{\lambda_B}-\frac{2}{\lambda_A+\lambda_B}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[|T_A-T_B|] &= E[|T_A-T_B|^2]-E[|T_A-T_B|]^2\\ &= E[T_A^2]-2E[T_A]E[T_B]+E[T_B^2]-E[|T_A-T_B|]^2\\ &= \frac{2}{\lambda_A^2}-\frac{2}{\lambda_A\lambda_B}+\frac{2}{\lambda_B^2}-\left(\frac{1}{\lambda_A}+\frac{1}{\lambda_B}-\frac{2}{\lambda_A+\lambda_B}\right)^2.\end{aligned}$$

Alternative Berechnung von $E[|T_A-T_B|]$ über die gemeinsame Dichte von (T_A,T_B): Partielle Integration ergibt

$$\int\lambda_A(s-t)e^{-\lambda_A s}ds=-se^{-\lambda_A s}-\int(-1)e^{-\lambda_A s}ds+te^{-\lambda_A s}=\left(t-s-\frac{1}{\lambda_A}\right)e^{-\lambda_A s}$$

und damit

$$\begin{aligned}E[|T_A-T_B|] &= \int_0^\infty\int_0^\infty |s-t|\lambda_A e^{-\lambda_A s}\lambda_B e^{-\lambda_B t}dsdt=\\ &= \int_0^\infty \lambda_B e^{-\lambda_B t}\left[-\int_0^t\lambda_A(s-t)e^{-\lambda_A s}ds+\int_t^\infty\lambda_A(s-t)e^{-\lambda_A s}ds\right]dt\\ &= \int_0^\infty\lambda_B e^{-\lambda_B t}\left[t-\frac{1}{\lambda_A}+2\frac{1}{\lambda_A}e^{-\lambda_A t}\right]dt\\ &= \frac{1}{\lambda_B}-\frac{1}{\lambda_A}+\frac{\lambda_B}{\lambda_A}\cdot\frac{2}{\lambda_A+\lambda_B}=\frac{1}{\lambda_A}+\frac{1}{\lambda_B}-\frac{2}{\lambda_A+\lambda_B}.\end{aligned}$$