Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (12 Punkte) Ein Elektron befindet sich in einem Abstand R vom Atomkern und hat daher eine potentielle Energie $\Phi = 1/R$. Wir nehmen an, dass R eine Zufallsvariable ist mit Dichte

$$f(r) = cr^2 e^{-r}, \text{ für } r > 0.$$

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von Φ, R, R^2 und geben Sie die beste lineare Prognose von Φ durch R an.

c) Bestimmen Sie die Dichte von Φ.

2. (8 Punkte) Hinter einem Vorhang stehen zwei Urnen A und B. Urne A enthält eine weisse und vier schwarze Kugeln. Urne B enthält drei weisse und zwei schwarze Kugeln. Jemand wählt nun eine der beiden Urnen zufällig, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass Urne A gewählt wird $p \in [0, 1]$ beträgt. Anschliessend wird die gewählte Urne hervorgeholt, und daraus unabhängig eine zufällig gewählte Kugel entnommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_W(p)$ (abhängig von p), dass die gewählte Kugel weiss ist.

b) Sie wollen nun p schätzen und führen das obige Experiment zehn Mal durch, wobei die Kugel nach jedem Experiment wieder in die Urne zurückgelegt wird. Die Farben der gewählten Kugeln sind dabei

weiss, schwarz, weiss, schwarz, schwarz, schwarz, weiss, schwarz, weiss, weiss.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser Folge (abhängig von $p_W(p)$) und bestimmen Sie anschliessend den Maximum-Likelihood Schätzer für p.

3. (4 Punkte) Wir betrachten dasselbe Urnenmodell wie in Aufgabe 2. Wir nehmen nun aber an, dass der tatsächliche Wert von p gleich $\frac{1}{4}$ ist. Sie führen das selbe Experiment wie oben durch, aber entnehmen diesmal drei Kugeln aus der gewählten Urne (ohne zurücklegen).

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie so zwei schwarze und eine weisse Kugel erhalten.

4. (12 Punkte) Eine Maschine besteht aus zwei Komponenten A und B mit Lebensdauer T_A bzw. T_B. Die Zufallsvariablen T_A und T_B seien unabhängig und exponentialverteilt mit Erwartungswert $\frac{1}{\lambda_A}$ bzw. $\frac{1}{\lambda_B}$. Die Maschine funktioniert solange bis eine ihrer Komponenten ausfällt.

a) Zeigen Sie, dass die Funktionsdauer T der Maschine exponentialverteilt ist mit Erwartungswert $\frac{1}{\lambda_A+\lambda_B}$.

b) Nach der Zeit t stellen wir fest, dass die Maschine nicht mehr funktioniert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Komponente A noch funktionsfähig?

c) Berechnen Sie die Varianz von $T_A - T_B$ und die Varianz von $|T_A - T_B|$.
Hinweis: Überlegen Sie, wie man $|T_A - T_B|$ durch T_A, T_B und T ausdrücken kann.