# Musterlösung

## Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

**1.** **a)** Sei $p_S(p)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Dann:

$$\begin{aligned} p_S(p) &= p \cdot \frac{4}{7} + 2p \cdot \frac{3}{8} + (1-3p) \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{14} \cdot p. \end{aligned}$$

**b)** Sei $\mathcal{C}$ das Ereignis „Die Urne $C$ wird gewählt" und $\mathcal{W}$ das Ereignis „Die gezogene Kugel ist weiss". Dann kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit geschrieben werden als $P(\mathcal{C}|\mathcal{W})$. Deshalb haben wir:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}|\mathcal{W}) &= \frac{P(\mathcal{W}|\mathcal{C})P(\mathcal{C})}{P(\mathcal{W})} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot (1-3p)}{1 - p_S(p)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot p}{\frac{1}{2} + \frac{13}{7} \cdot p}. \end{aligned}$$

**2.** **a)** Es muss gelten

$$1 = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = \frac{1}{2} + c\frac{1}{r-1},$$

also $c = \frac{r-1}{2}$.

**b)** Da $F_X$ in 0 und 1 stetig ist mit $F_X(0) = 0$ und $F_X(1) = \frac{1}{2}$, besitzt $X$ die Dichte

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \le x < 1) \\ \frac{r-1}{2}\frac{1}{x^r} & (x \ge 1). \end{cases}$$

Es gilt für $x > 1$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + c\frac{1}{r-1}(1 - x^{1-r}) = 1 - \frac{1}{2}x^{1-r}.$$

Die Verteilungsfunktion von $Y = \log X$ ist daher für $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P[\log X \le y] = P[X \le e^y] = F_X(e^y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2y} & (y < 0) \\ 1 - \frac{1}{2}e^{y(1-r)} & (y \ge 0) \end{cases}$$

und die Dichte von $Y$ ist

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} e^{2y} & (y < 0) \\ \frac{r-1}{2}e^{y(1-r)} & (y \ge 0). \end{cases}$$

**c)** Wegen $x_1, x_4 < 1$ und $x_2, x_3, x_5 > 1$ ist die Likelihoodfunktion der Zufallsfolge $x = (x_1, ..., x_5)$ gegeben durch

$$L(r, x) = \prod_{i=1}^{5} f_X(x_i) = x_1 x_4 \frac{1}{(x_2 x_3 x_5)^r} \left(\frac{r-1}{2}\right)^3.$$

Die Funktion $r \mapsto \log L(r, x)$, $r > 1$, wird maximal für

$$0 = \frac{d}{dr} \log L(r, x) = \frac{d}{dr} \left( \log(x_1 x_4) - r \log(x_2 x_3 x_5) + 3 \log \frac{r-1}{2} \right) = -\log(x_2 x_3 x_5) + 3 \frac{1}{r-1},$$

also $r = 1 + \frac{3}{\log(x_2 x_3 x_5)} = 1 + \frac{3}{0.9} = \frac{13}{3}$.

**3.** **a)** Es gilt für $k \geq 1$

$$E[U^k] = \int_0^1 x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{k+1},$$

und daher

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[U, U^2] &= E[U^3] - E[U]E[U^2] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \\
\mathrm{Var}[UV] &= E[U^2 V^2] - E[UV]^2 = E[U^2]E[V^2] - E[U]^2 E[V]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{144}.
\end{aligned}$$

**b)** Die Verteilungsfunktion $F$ von $UV$ ist für $0 < x < 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
F(x) = P[UV \leq x] &= \int_0^1 \left( \int_{\{v \in [0,1] \,|\, v \leq x/u\}} dv \right) du \\
&= \int_0^1 \min\left(\frac{x}{u}, 1\right) du \\
&= \int_0^x 1\, du + \int_x^1 \frac{x}{u} du \\
&= x + x(0 - \log x).
\end{aligned}$$

Da $UV$ nur Werte in $[0, 1]$ annimmt, ist die Verteilungsfunktion von $UV$ also

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x(1 - \log x) & (0 < x < 1) \\ 1 & (x \geq 1). \end{cases}$$