Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (12 Punkte) Wir betrachten 3 Urnen A, B und C. Urne A enthält 3 weisse und 4 schwarze Kugeln, Urne B enthält 5 weisse und 3 schwarze Kugeln, und Urne C enthält 1 weisse und 3 schwarze Kugeln.

Zuerst wird eine der 3 Urnen zufällig gewählt, wobei Urne A mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, \frac{1}{3}]$ gewählt wird und Urne B mit Wahrscheinlichkeit $2p$. Danach wird zufällig eine Kugel aus der gewählten Urne entnommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (abhängig von p), dass die gezogene Kugel schwarz ist.

b) Wir nehmen jetzt an, dass die gezogene Kugel weiss ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ursprünglich die Urne C gewählt wurde.

2. (12 Punkte) Sei $r > 1$ und X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{x^2}{2} & (0 \leq x < 1) \\ \frac{1}{2} + c\int_1^x \frac{1}{u^r} du & (x \geq 1) \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante $c = c(r)$ in Abhängigkeit von r.

b) Berechnen Sie die Dichte von X sowie die Dichte von $Y = \log X$.

c) Ein Zufallsgenerator erzeugt eine Folge unabhängiger positiver Zahlen $x_1, ..., x_5$, die gemäss F_X für ein unbekanntes $r > 1$ verteilt sind. Wir erhalten für die Logarithmen der Zufallszahlen $\log x_1 = -0.4$, $\log x_2 = 0.1$, $\log x_3 = 0.5$, $\log x_4 = -0.1$, $\log x_5 = 0.3$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für r.

3. (12 Punkte) Seien U und V zwei unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf $[0, 1]$.

a) Berechnen Sie die Kovarianz von U und U^2, sowie die Varianz von UV.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von UV.