D–ITET

Prüfung Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

401-0604-00L

Nachname
PO

Vorname
GE

Legi-Nr.
XX-345-678

Prüfungs-Nr.
001

Prüfungsangabe

Bitte noch nicht umblättern!

Für jede der Subfragen von 1., 2. und 3. ist genau eine Antwortmöglichkeit richtig.

1. Multiple choice [3 Punkte]

1.1. **[0.5 Punkte]** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der Folgenden Aussagen ist für alle Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y] < \infty$ wahr:

(A) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ gilt immer.

(B) $\mathbb{E}[X+Y] \geq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.

(C) $\mathbb{E}[X+Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.

(D) Keine dieser (Un-)gleichungen gilt immer, aber $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ gilt, wenn X und Y unabhängig sind.

1.2. **[1.5 Punkte]** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der Folgenden Aussagen ist für alle Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ wahr:

(A) $\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$ gilt immer.

(B) $\sigma^2_{X+Y} \geq \sigma^2_X + \sigma^2_Y$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.

(C) $\sigma^2_{X+Y} \leq \sigma^2_X + \sigma^2_Y$ gilt immer, aber (A) gilt im allgemeinen nicht.

(D) Keine dieser (Un-)gleichungen gilt immer. Aber $\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$ gilt, wenn X und Y unabhängig sind.

1.3. **[1 Punkt]** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Laplace-Modell auf $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wie viele Elemente hat die Menge $\mathcal{F}$?

(A) $|\mathcal{F}| = 1$

(B) $|\mathcal{F}| = 5$

(C) $|\mathcal{F}| = 10$

(D) $|\mathcal{F}| = 32$

(E) $|\mathcal{F}| = 55$

2. Multiple-Choice: Unsicherheits-Quantifizierung [9 Punkte]

Sei $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eine Folge von i.i.d. normalverteilten Zufallsvariablen mit unbekanntem Mittelwert m und bekannter Standardabweichung $\sigma = 0.5$. Wir betrachten das Intervall $I_n = [\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - a_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i + a_n]$ mit $a_n := \sigma\Phi^{-1}(97.5\%)$.

2.1. **[2 Punkte]** Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine neue unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable $Y_{n+1} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ im Intervall I_n liegt, im Limes $n \to \infty$?

(A) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 0\%$.
(B) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 5\%$.
(C) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 50\%$.
(D) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 95\%$.
(E) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n] = 100\%$.

2.2. **[2 Punkte]** Wir fragen uns wie sich die Antwort zu Frage 2.1 ändert, wenn wir nur $\tilde{n} < \infty$ Beobachtungen haben anstatt den Limes $n \to \infty$ zu betrachten. Welche der Aussagen ist wahr?[1]

(A) $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[Y_{\tilde{n}+1} \in I_{\tilde{n}}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n]$.
(B) $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[Y_{\tilde{n}+1} \in I_{\tilde{n}}] < \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n]$.
(C) $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[Y_{\tilde{n}+1} \in I_{\tilde{n}}] > \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_{n+1} \in I_n]$.
(D) Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist korrekt, da die Richtung der Ungleichung von $\tilde{n}$ und/oder m abhängt.

2.3. **[2 Punkte]** Welche der folgenden Aussagen ist wahr?[1]

(A) $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[Y_{\tilde{n}} \in I_{\tilde{n}}] = \mathbb{P}[Y_{\tilde{n}+1} \in I_{\tilde{n}}]$.
(B) $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[Y_{\tilde{n}} \in I_{\tilde{n}}] < \mathbb{P}[Y_{\tilde{n}+1} \in I_{\tilde{n}}]$.
(C) $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[Y_{\tilde{n}} \in I_{\tilde{n}}] > \mathbb{P}[Y_{\tilde{n}+1} \in I_{\tilde{n}}]$.
(D) Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist korrekt, da die Richtung der Ungleichung von $\tilde{n}$ und/oder m abhängt.

2.4. **[2 Punkte]** Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der unbekannte Mittelwert m im Intervall I_n liegt, im Limes $n \to \infty$?

(A) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[m \in I_n] = 0\%$.
(B) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[m \in I_n] = 5\%$.
(C) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[m \in I_n] = 50\%$.
(D) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[m \in I_n] = 95\%$.
(E) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[m \in I_n] = 100\%$.

Hinweis: $\mathbb{P}[m \in I_n] = p\%$ bedeutet dass I_n ein $p\%$-Konfidenzintervall für den Mittelwert m ist.

2.5. **[1 Punkt]** Wir fragen uns wie sich die Antwort zu Frage 2.4 ändert, wenn wir nur $\tilde{n} < \infty$ Beobachtungen haben anstatt den Limes $n \to \infty$ zu betrachten. Welche der Aussagen ist wahr?[1]

(A) $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[m \in I_{\tilde{n}}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[m \in I_n]$.
(B) $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[m \in I_{\tilde{n}}] < \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[m \in I_n]$.
(C) $\forall \tilde{n} \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[m \in I_{\tilde{n}}] > \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[m \in I_n]$.
(D) Keine der anderen Antwortmöglichkeiten ist korrekt, da die Richtung der Ungleichung von $\tilde{n}$ und/oder m abhängt.

[1] Wir definieren die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ ohne 0.

3. Multiple-Choice: Z [3.5 Punkte]

Gegeben sei eine Zufallsvariable Z mit der Verteilungsfunktion

$$F_Z(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ 2a, & \text{falls } 0 \le a < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(a - \frac{1}{4})^2, & \text{falls } \frac{1}{4} \le a < \frac{5}{4} \\ 1, & \text{falls } a \ge \frac{5}{4}. \end{cases}$$

3.1. **[0.5 Punkte]** Sei $E_1 = \{Z < \frac{1}{8}\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_1?

(A) $\mathbb{P}[E_1] = 0$ (B) $\mathbb{P}[E_1] = \frac{1}{64}$ (C) $\mathbb{P}[E_1] = \frac{1}{4}$

3.2. **[0.5 Punkte]** Sei $E_2 = \{Z = \frac{1}{6}\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_2?

(A) $\mathbb{P}[E_2] = 0$ (B) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{1}{6}$ (C) $\mathbb{P}[E_2] = \frac{1}{3}$

3.3. **[0.5 Punkte]** Sei $E_3 = \{\frac{1}{16} \le Z < \frac{3}{4}\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_3?

(A) $\mathbb{P}[E_3] = 0$ (B) $\mathbb{P}[E_3] = \frac{1}{3}$ (C) $\mathbb{P}[E_3] = \frac{1}{2}$

3.4. **[0.5 Punkte]** Sei $E_4 = \{Z > \frac{1}{5}\}$. Was ist die Wahrscheinlichkeit von E_4?

(A) $\mathbb{P}[E_4] = 0$ (B) $\mathbb{P}[E_4] = \frac{2}{5}$ (C) $\mathbb{P}[E_4] = \frac{3}{5}$

3.5. **[0.5 Punkte]** Sind E_1 und E_2 unabhängig?

(A) Nein (B) Ja

3.6. **[0.5 Punkte]** Sind E_1 und E_3 unabhängig?

(A) Nein (B) Ja

3.7. **[0.5 Punkte]** Sind E_1 und E_4 unabhängig?

(A) Nein (B) Ja

4. Fortsetzung von Aufgabe 3.: Z [2 Punkte]

Hat Z aus der 3. Aufgabe eine Dichte? Wenn ja, dann berechne die Dichtefunktion f_Z. Wenn nein, begründe warum.

5. Eddy **[6.5 Punkte]**

Eddy bekommt 2 Säcke mit Münzen. Der erste Sack enthält 50 faire[2] Münzen, die er zum Casino bringen soll. Der zweite Sack enthält 50 defekte Münzen, die mit 75% Wahrscheinlichkeit "Kopf" anzeigen, wenn sie geworfen werden (und somit entsorgt werden sollen).

Leider passiert Eddy ein Unfall bei dem alle 100 Münzen vermischt werden. Darum zieht Eddy zufällig eine Münze aus den 100 gemischten Münzen und will testen ob sie fair oder defekt ist.

Die Nullhypothese $\mathcal{H}_0$ ist, dass die Münze defekt ist. Zum testen wirft Eddy die Münze 2 Mal und verwirft die Nullhypothese nur falls keiner der beiden Würfe "Kopf" ergibt.

Notation: Wir definieren die beiden Ereignisse:
H_0 :="Die Münze ist defekt." und
T :="Der Test verwirft die Nullhypothese."="Keiner der beiden Würfe ergibt 'Kopf'.".

Hinweis: Verwende diese Notation um Terme wie $\mathbb{P}[T|H_0]$ oder $\mathbb{P}[T \cap H_0]$ übersichtlich aufzuschreiben.

5.1. **[1.5 Punkte]** Berechne das Signifikanz-Niveau α des Tests.

Hinweis: Das Signifikanz-Niveau (englisch: "relevance level") α ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art. Man spricht von einem Fehler 1. Art (englisch: "Type I error") wenn die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird.

5.2. **[1 Punkt]** Berechne die Stärke $1-\beta$ des Tests.

Hinweis: β ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art. Die Stärke $1-\beta$ des Tests wird auch "Trennschärfe" oder (im englischen) als "Power" bezeichnet.

5.3. **[2 Punkte]** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze fair ist, wenn der Test die Nullhypotehse verwirft.

5.4. Eddy wendet diesen Test auf alle 100 Münzen an. Eddy gibt alle Münzen die bei keinem der beiden Würfe "Kopf" ergeben an das Casino weiter und entsorgt alle anderen Münzen.

(i) **[1 Punkt]** Wie viele defekte Münzen werden dem Casino gegeben in Erwartung?

(ii) **[1 Punkt]** Wie viele faire Münzen werden dem Casino gegeben in Erwartung?

Hinweis: Wir definieren die Ereignisse $H_{0,i}$ und T_i analog zu H_0 und T für die i-te Münze. Das bedeutet, die i-te Münze wird genau dann dem Casino gegeben, wenn T_i eintritt.

Aufgabe 6 ist auf der nächsten Seite.

[2] Faire Münzen ergeben mit 50% Wahrscheinlichkeit "Kopf", wenn sie geworfen werden.

6. X und Y **[6 Punkte]**

Betrachten Sie die Zufallsvariable (X, Y) mit Werten in $\mathbb{R}^2$, deren gemeinsame Dichte gegeben ist durch:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2y) & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

6.1. **[2 Punkte]** Zeigen Sie, dass die Randdichten f_X und f_Y durch

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{0 \leq x \leq 1} \frac{3}{4}(x^2 + 1)$$
$$f_Y(y) = \mathbb{1}_{0 \leq y \leq 1} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} y \right)$$

gegeben sind.

6.2. **[1 Punkt]** Sind X und Y unabhängig? Begrnde die Antwort.

6.3. Berechne

(i) **[1.5 Punkte]** den Erwartungswert von X

(ii) **[1.5 Punkte]** den Erwartungswert von XY.

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $\mathbb{P}[Z \leq 1.96] = \Phi(1.96) \approx 0.975$.