Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. Wir definieren folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} F &= \{\text{der Gast bestellt Fisch}\}, \\ M &= \{\text{der Gast bestellt Fleisch}\}, \\ V &= \{\text{der Gast bestellt vegetarisch}\}, \\ R &= \{\text{der Gast bestellt Rotwein}\}, \\ W &= \{\text{der Gast bestellt Weisswein}\}. \end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung gilt

$$P[W|F] = \frac{2}{3}, \quad P[R|F] = \frac{1}{6}, \quad P[W|M] = \frac{1}{6}, \quad P[R|M] = \frac{2}{3}, \quad P[W|V] = \frac{1}{2}, \quad P[R|V] = \frac{1}{2}.$$

a) Es gilt, da $\{\text{Gast bestellt Wein}\} = R \cup W$ eine disjunkte Zerlegung ist,

$$\begin{aligned} P[\text{Gast bestellt keinen Wein}] &= 1 - P[\text{Gast bestellt Wein}] \\ &= 1 - P[R] - P[W]. \end{aligned}$$

Die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit liefert

$$\begin{aligned} P[R] &= P[R|F]P[F] + P[R|M]P[M] + P[R|V]P[V] \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir (oder durch Symmetrie)

$$P[W] = P[W|F]P[F] + P[W|M]P[M] + P[W|V]P[V] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Wir erhalten

$$P[\text{Gast bestellt keinen Wein}] \overset{\textbf{a)}}{=} 1 - P[R] - P[W] = 1 - \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}.$$

b) Gesucht ist $P[V|R]$. Die Formel von Bayes sagt, dass

$$\begin{aligned} P[V|R] &= \frac{P[R|V]P[V]}{P[R|V]P[V] + P[R|F]P[F] + P[R|M]P[M]} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) (*i*) Für $k \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
P[X=k] &= \sum_{n=k}^{\infty} P[X=k,\, N=n] \;=\; \sum_{n=k}^{\infty} P[X=k \mid N=n] P[N=n] \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1-p)^n \lambda^n \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \;=\; e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Für alle anderen k is $P[X=k]=0$. Also hat X eine Poissonverteilung mit Parameter $\lambda p = 20p$.

(*ii*) Da X eine Poissonverteilung mit Parameter λp hat, gilt $E[X] = \lambda p = 20p$.

(*iii*) Gesucht ist $P[X \geq 1]$. Es gilt

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X=0] = 1 - e^{-\lambda p} = 1 - e^{-20\lambda}.$$

2. a) Für den Erwartungswert von B gilt

$$\begin{aligned}
E[B] &= \int_{-\infty}^{\infty} b f_B(b) db \;=\; 6\int_0^1 b(b-b^2) db \;=\; 6\int_0^1 b^2 db - 6\int_0^1 b^3 db \\
&= 2 - \frac{3}{2} \;=\; \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
E[B^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} b^2 f_B(b) db \;=\; 6\int_0^1 b^2(b-b^2) db \;=\; 6\int_0^1 b^3 db - 6\int_0^1 b^4 db \\
&= \frac{3}{2} - \frac{6}{5} \;=\; \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

Für die Varianz von B erhalten wir somit

$$\operatorname{Var}(B) \;=\; E[B^2] - E[B]^2 \;=\; \frac{3}{10} - \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{20}.$$

b) Wir haben

$$\begin{aligned}
P[B \leq 1/2] &= \int_{-\infty}^{1/2} f_B(b) db \;=\; 6\int_0^{1/2} (b-b^2) db \\
&= 6\left[\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3}\right]_0^{1/2} \;=\; 6\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) \;=\; \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

c) Die Randdichte von R ist

$$\begin{aligned}
f_R(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,A}(r,a) da \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} 4are^{-r^2} 1_{\{r\geq 0\}} 1_{\{0\leq a\leq r\}} da \\
&= 4re^{-r^2}\left(\int_0^r a da\right) 1_{\{r\geq 0\}} \;=\; 4re^{-r^2}\left(\frac{r^2}{2}\right) 1_{\{r\geq 0\}} \;=\; 2r^3 e^{-r^2} 1_{\{r\geq 0\}}.
\end{aligned}$$

Für die Randdichte von A gilt

$$\begin{aligned}
f_A(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,A}(r,a) dr \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} 4are^{-r^2} 1_{\{r\geq 0\}} 1_{\{0\leq a\leq r\}} dr \\
&= 4a\left(\int_a^{\infty} re^{-r^2} dr\right) 1_{\{a\geq 0\}} \;=\; 4a\left(\frac{-1}{2} e^{-r^2}\Big|_a^{\infty}\right) 1_{\{a\geq 0\}} \\
&= 2ae^{-a^2} 1_{\{a\geq 0\}}.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

d) R und A sind genau dann unabhängig, falls $f_{R,A}(r,a) = f_R(r) f_A(a)$ für alle r, $a \in \mathbb{R}$ gilt. Da z.B. $f_R(1)f_A(1) = 4e^{-2} \neq 4e^{-1} = f_{R,A}(1,1)$ gilt, sind R und A *nicht* unabhängig.

e) Es gilt

$$\begin{aligned}
P[A \leq R/2] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{R,A}(r,a) 1_{\{a \leq r/2\}} da dr \\
&= 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} are^{-r^2} 1_{\{r\geq 0\}} 1_{\{0 \leq a \leq r\}} 1_{\{a \leq r/2\}} da dr \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{r/2} a da\right) re^{-r^2} dr \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\left(\frac{r^2}{8}\right) re^{-r^2} dr \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} r^3 e^{-r^2} dr \\
&= \frac{1}{2}\left(-r^2 \frac{1}{2} e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} re^{-r^2} dr \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Alternative Berechnung:

$$\begin{aligned}
P[A \leq R/2] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{R,A}(r,a) 1_{\{a \leq r/2\}} dr da \\
&= 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} are^{-r^2} 1_{\{r\geq 0\}} 1_{\{0 \leq a \leq r\}} 1_{\{a \leq r/2\}} dr da \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\left(\int_{2a}^{\infty} re^{-r^2} dr\right) a da \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_{2a}^{\infty}\right) a da \\
&= 2\int_{0}^{\infty}\left(e^{-(2a)^2}\right) a da \\
&= 2\int_{0}^{\infty} ae^{-4a^2} da \\
&= 2\left[-\frac{1}{8}e^{-4a^2}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

3. a) Für $i \in \{1,2,3,4\}$ gilt wegen der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$P[X_1 = i] = \sum_{j=1}^{4} P[X_1 = i, X_2 = j] = 3p + \left(\frac{1}{4} - 3p\right) = \frac{1}{4},$$

und $P[X_1 = i] = 0$ für alle anderen i. Analog folgt, dass $P[X_2 = j] = 1/4$ für $j \in \{1,2,3,4\}$ und $P[X_2 = j] = 0$ sonst.

b) X_1 und X_2 sind genau dann unabhängig, falls

$$P[X_1 = i, X_2 = j] = P[X_1 = i]P[X_2 = j]$$

gilt für alle i und j. Aus **a)** folgt also, dass X_1 und X_2 genau dann unabhängig sind, falls

$$P[X_1 = i, X_2 = j] = P[X_1 = i]P[X_2 = j] = \frac{1}{16}$$

Bitte wenden!

gilt für alle $i, j = 1, 2, 3, 4$, also

$$p = \frac{1}{16} \quad \text{und} \quad \frac{1}{4} - 3p = \frac{1}{16}.$$

X_1 und X_2 sind also genau dann unabhängig, falls $p = 1/16$.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
P[X_1 + X_2 = 2] &= P[X_1 = 1,\ X_2 = 1] = 1/4 - 3p, \\
P[X_1 + X_2 = 5] &= P[X_1 = 1,\ X_2 = 4] + P[X_1 = 2,\ X_2 = 3] \\
&\quad + P[X_1 = 3,\ X_2 = 2] + P[X_1 = 4,\ X_2 = 1] \\
&= 4p, \\
P[X_1 + X_2 = 6] &= P[X_1 = 2,\ X_2 = 4] + P[X_1 = 3,\ X_2 = 3] + P[X_1 = 4,\ X_2 = 2] \\
&= p + 1/4 - 3p + p = 1/4 - p.
\end{aligned}$$

d) Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
L(\mu, x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \mu^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} 1_{\{x_i \geq \mu\}} \\
&= \mu^n \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \right) 1_{\{\min\{x_1, \ldots, x_n\} \geq \mu\}}.
\end{aligned}$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer μ_{MLE} von μ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mu_{MLE} &= \arg\max_{\mu} L(\mu, x_1, \ldots, x_n) \\
&= \arg\max_{\mu} \mu^n \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \right) 1_{\{\min\{x_1, \ldots, x_n\} \geq \mu\}}.
\end{aligned}$$

Unter der Nebenbedingung $\min\{x_1, \ldots, x_n\} \geq \mu$ ist $\mu^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-2}$ maximal für $\mu = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$. Also ist

$$\mu_{MLE} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

e) Aus Aufgabe **b)** folgt, dass

$$\hat{\mu}_{MLE} = \min\{x_1, \ldots, x_5\} = 9.9.$$