

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Ein gegebener Gast bestellt in einem Restaurant jeweils genau ein Gericht, wobei dieses entweder nur Fisch, nur Fleisch oder nur vegetarisches (weder Fisch noch Fleisch) enthält. Danach bestellt der Gast genau eine Flasche als Getränk (Rotwein, Weisswein oder Wasser). Der Küchenchef hat folgende Erfahrung gemacht: Ein Gast bestellt Fisch, Fleisch oder vegetarisch mit Wahrscheinlichkeit je $1/3$. Wenn ein Gast Fisch bestellt hat, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Flasche Weisswein bestellt, gleich $2/3$. Wenn er jedoch Fleisch bestellt hat, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Flasche Weisswein bestellt, nur gleich $1/6$. Genau umgekehrt ist es beim Rotwein: Wenn ein Gast Fisch bestellt hat, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Flasche Rotwein bestellt, nur gleich $1/6$. Wenn er jedoch Fleisch bestellt hat, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Flasche Rotwein bestellt, gleich $2/3$. Wenn ein Gast vegetarisch bestellt hat, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Flasche Weisswein bestellt, gleich $1/2$, und die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Flasche Rotwein bestellt, ebenfalls gleich $1/2$.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast *keinen* Wein bestellt?
- b) Ein Gast hat eine Flasche Rotwein auf seinem Tisch, jedoch noch nicht sein bestelltes Gericht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er vegetarisch bestellt hat?

Sei N die totale Anzahl Gäste, welche das Restaurant an einem Abend besuchen. Wir nehmen an, dass N eine Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = 20$ hat. Zudem nehmen wir an, dass die Gäste im Restaurant ihre Bestellungen unabhängig voneinander tätigen. Sei X die Anzahl Weinflaschen, welche an einem Abend getrunken werden, und sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein gegebener Gast eine Flasche Wein bestellt. Lösen Sie folgende Aufgaben in Abhängigkeit von p .

- c) (i) Berechnen Sie die Verteilung von X .
- (ii) Wie viele Weinflaschen werden an einem Abend im Schnitt bestellt?
HINWEIS: Die Formel für den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen muss nicht hergeleitet werden.
- (iii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Abend mehr als eine Flasche Wein bestellt wird?

Bitte wenden!

2. (10 Punkte) Wir betrachten das Intervall $J = [0, 1]$ und eine Zufallsvariable B mit Werten in J . Die Dichte von B sei

$$f_B(b) = \begin{cases} 6(b - b^2), & \text{falls } 0 \leq b \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von B .
 b) Berechnen Sie $P[B \leq 1/2]$.

Wir betrachten nun ein zufälliges Intervall $I = [0, R]$ und eine Zufallsvariable A mit Werten in I . Die gemeinsame Dichte von (R, A) sei

$$f_{R,A}(r, a) = \begin{cases} 4a r e^{-r^2}, & \text{falls } r \geq 0 \text{ und } 0 \leq a \leq r, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- c) Bestimmen Sie die Randdichte von R und die Randdichte von A .
 d) Sind R und A unabhängig? Beweisen Sie die Unabhängigkeit oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.
 e) Berechnen Sie die $P[A \leq R/2]$.

3. (10 Punkte) Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit gemeinsamen Wertebereich $\{1, 2, 3, 4\}$. Ihre gemeinsame Verteilung ist gegeben durch

$$P[X_1 = i, X_2 = j] = \begin{cases} p, & \text{falls } i \neq j, \\ \frac{1}{4} - 3p, & \text{falls } i = j, \end{cases}$$

wobei $p \in (0, 1/12)$ und $i, j = 1, 2, 3, 4$.

- a) Berechnen Sie die Verteilung von X_1 und die Verteilung von X_2 .
 b) Für welche Werte von p sind X_1 und X_2 unabhängig?
 c) Berechnen Sie $P[X_1 + X_2 = k]$ für alle $k \in \{2, 5, 6\}$.

Sei $\mu > 0$ und sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\mu}{x^2}, & \text{falls } x \geq \mu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n , welche jeweils die gleiche Verteilung wie X haben.

- d) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer μ_{MLE} von μ als Funktion von X_1, \dots, X_n .
 e) Folgende $n = 5$ unabhängigen Beobachtungen wurden von X gemacht:

i	1	2	3	4	5
x_i	14.8	20.50	75.2	9.9	36.9

Berechnen Sie anhand dieser Werte den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\mu}_{MLE}$ von μ .