Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. Seien U_A das Ereignis, dass Urne A gewählt wird, und U_B das Ereignis, dass Urne B gewählt wird. Es gilt $P[U_A] = P[U_B] = 1/2$.

a) Gesucht ist $P[U_A|\, X = 1]$. Laut Aufgabenstellung gilt

$$\begin{aligned} P[X = k|\, U_A] &= \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3; \\ P[X = l|\, U_B] &= \binom{3}{l}\left(\frac{1}{3}\right)^l\left(\frac{2}{3}\right)^{3-l} \qquad l = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Nach der Formel von Bayes gilt

$$\begin{aligned} P[U_A|\, X = 1] &= \frac{P[X = 1|\, U_A]P[U_A]}{P[X = 1|\, U_A]P[U_A] + P[X = 1|\, U_B]P[U_B]} \\ &= \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3\cdot 9}{3\cdot 9 + 4\cdot 8} = \frac{27}{59} \end{aligned}$$

b) Wir suchen die Wahrscheinlichkeit vom Ereignis $E = \{X = 0 \text{ oder } X = 3\} = \{X = 0\} \cup \{X = 3\}$. Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} P[E] &= P[X = 0] + P[X = 3] \\ &= P[X = 0|U_A]P[U_A] + P[X = 3|U_A]P[U_A] \\ &\qquad + P[X = 0|U_B]P[U_B] + P[X = 3|U_B]P[U_B] \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{27 + 27 + 64 + 8}{216} = \frac{1}{2}\cdot\frac{126}{216} = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{3} kP[X = k] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} k(P[X = k|U_A] + P[X = k|U_B]) = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Wegen $3 = X + Y$ gilt

$$E[Y] = E[3 - X] = 3 - E[X] = \frac{7}{4}.$$

Bitte wenden!

2. **a)** Für den Erwartungswert von B gilt

$$\begin{aligned} E[B] &= \int_{-\infty}^{\infty} b f_B(b) db = 4\int_0^1 b(b-b^3)db = 4\int_0^1 b^2 db - 4\int_0^1 b^4 db \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} E[B^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} b^2 f_B(b) db = 4\int_0^1 b^2(b-b^3)db = 4\int_0^1 b^3 db - 4\int_0^1 b^5 db \\ &= 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Für die Varianz von B erhalten wir somit

$$\mathrm{Var}(B) = E[B^2] - E[B]^2 = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} = \frac{75}{225} - \frac{64}{225} = \frac{11}{225}.$$

b) Wir haben

$$\begin{aligned} P[B \leq 1/3] &= \int_{-\infty}^{1/3} f_B(b) db = 4\int_0^{1/3} (b-b^3) db \\ &= 4\left[\frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{4}\right]_0^{1/3} = \frac{2}{9} - \frac{1}{81} = \frac{17}{81}. \end{aligned}$$

c) Die Randdichte von R ist

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,A}(r,a) da = \int_{-\infty}^{\infty} 4are^{-r^2} 1_{\{r\geq 0\}} 1_{\{0\leq a\leq r\}} da \\ &= 4re^{-r^2}\left(\int_0^r a da\right) 1_{\{r\geq 0\}} = 4re^{-r^2}\left(\frac{r^2}{2}\right) 1_{\{r\geq 0\}} = 2r^3 e^{-r^2} 1_{\{r\geq 0\}}. \end{aligned}$$

Für die Randdichte von A gilt

$$\begin{aligned} f_A(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,A}(r,a) dr = \int_{-\infty}^{\infty} 4are^{-r^2} 1_{\{r\geq 0\}} 1_{\{0\leq a\leq r\}} dr \\ &= 4a\left(\int_a^{\infty} re^{-r^2} dr\right) 1_{\{a\geq 0\}} = 4a\left(\frac{-1}{2} e^{-r^2}\Big|_a^{\infty}\right) 1_{\{a\geq 0\}} \\ &= 2ae^{-a^2} 1_{\{a\geq 0\}}. \end{aligned}$$

d) R und A sind genau dann unabhängig, falls $f_{R,A}(r,a) = f_R(r) f_A(a)$ für alle r, $a \in \mathbb{R}$ gilt. Da z.B. $f_R(1) f_A(1) = 4e^{-2} \neq 4e^{-1} = f_{R,A}(1,1)$ gilt, sind R und A *nicht* unabhängig. Alternativ, betrachte man $P(A > 2) > 0$ und $P(R < 1) > 0$, aber

$$P(A > 2, R < 1) = 0 \neq P(A > 2) \cdot P(R < 1).$$

Siehe nächstes Blatt!

e) Es gilt

$$\begin{aligned}
P[A \leq R/3] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{R,A}(r,a) 1_{\{a \leq r/3\}} da dr \\
&= 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} are^{-r^2} 1_{\{r\geq 0\}} 1_{\{0\leq a \leq r\}} 1_{\{a \leq r/3\}} da dr \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{r/3} ada\right) re^{-r^2} dr \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\left(\frac{r^2}{18}\right) re^{-r^2} dr \\
&= \frac{2}{9}\int_{0}^{\infty} r^3 e^{-r^2} dr \\
&= \frac{2}{9}\left(-r^2\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr\right) \\
&= \frac{2}{9}\int_{0}^{\infty} re^{-r^2} dr \\
&= \frac{2}{9}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

3. a) Für $i \in \{1,2,3,4,5\}$ gilt wegen der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$P[X_1 = i] = \sum_{j=1}^{5} P[X_1 = i,\, X_2 = j] = 4p + \left(\frac{1}{5} - 4p\right) = \frac{1}{5},$$

und $P[X_1 = i] = 0$ für alle anderen i. Analog folgt, dass $P[X_2 = j] = 1/5$ für $j \in \{1,2,3,4,5\}$ und $P[X_2 = j] = 0$ sonst. X_1 und X_2 sind deshalb gleichverteilt.

b) X_1 und X_2 sind genau dann unabhängig, falls

$$P[X_1 = i,\, X_2 = j] = P[X_1 = i]P[X_2 = j]$$

gilt für alle i und j. Aus **a)** folgt also, dass X_1 und X_2 genau dann unabhängig sind, falls

$$P[X_1 = i,\, X_2 = j] = P[X_1 = i]P[X_2 = j] = \frac{1}{25}$$

gilt für alle $i, j = 1,2,3,4,5$, also

$$p = \frac{1}{25} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5} - 4p = \frac{1}{25}.$$

X_1 und X_2 sind also genau dann unabhängig, falls $p = 1/25$.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
P[X_1 + X_2 = 2] &= P[X_1 = 1,\, X_2 = 1] = 1/5 - 4p, \\
P[X_1 + X_2 = 5] &= P[X_1 = 1,\, X_2 = 4] + P[X_1 = 2,\, X_2 = 3] \\
&\quad + P[X_1 = 3,\, X_2 = 2] + P[X_1 = 4,\, X_2 = 1] \\
&= 4p, \\
P[X_1 + X_2 = 6] &= P[X_1 = 2,\, X_2 = 4] + P[X_1 = 3,\, X_2 = 3] + P[X_1 = 4,\, X_2 = 2] \\
&+ P[X_1 = 5,\, X_2 = 1] + P[X_1 = 1,\, X_2 = 5] \\
&= p + 1/5 - 4p + p + p + p = 1/5.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

d) Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\mu, x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \mu^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} 1_{\{x_i \geq \mu\}} \\ &= \mu^n \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \right) 1_{\{\min\{x_1,\ldots,x_n\} \geq \mu\}}. \end{aligned}$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer μ_{MLE} von μ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mu_{MLE} &= \arg\max_{\mu} L(\mu, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \arg\max_{\mu} \mu^n \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \right) 1_{\{\min\{x_1,\ldots,x_n\} \geq \mu\}}. \end{aligned}$$

Unter der Nebenbedingung $\min\{x_1, \ldots, x_n\} \geq \mu$ ist $\mu^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-2}$ maximal für $\mu = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$. Also ist

$$\mu_{MLE} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

e) Aus Aufgabe **d)** folgt, dass

$$\hat{\mu}_{MLE} = \min\{x_1, \ldots, x_5\} = 12.7.$$