Prof. Dr. P. Nolin | ETH Zürich | Sommer 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (8 Punkte) Wir betrachten zwei Urnen A und B. Die Urne A enthält 3 blaue und 3 rote Kugeln. Die Urne B enthält 2 blaue Kugeln und 4 rote Kugeln. $P[U_A] = \frac{1}{2}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit Urne A zu wählen und $P[U_B] = \frac{1}{2}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit Urne B zu wählen. Man wählt nun zufällig eine Urne und zieht dann aus der gewählten Urne 3 Kugeln nacheinander zufällig *mit* Zurücklegen. Es bezeichnen X die Anzahl gezogener blauer Kugeln und Y die Anzahl gezogener roter Kugeln.

a) Falls genau eine der gezogenen Kugeln blau ist, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Urne A gewählt wurde?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei gezogenen Kugeln die selbe Farbe haben.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E[X]$ und $E[Y]$.

2. (12 Punkte) Wir betrachten das Intervall $T = [0, 1]$ und eine Zufallsvariable B mit Werten in T. Die Dichte von B sei

$$f_B(b) = \begin{cases} 4(b - b^3), & \text{falls } 0 \leq b \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von B.

b) Berechnen Sie $P[B \leq 1/3]$.

Wir betrachten nun ein zufälliges Intervall $I = [0, R]$ und eine Zufallsvariable A mit Werten in I. Die gemeinsame Dichte von (R, A) sei

$$f_{R,A}(r, a) = \begin{cases} 4a\, re^{-r^2}, & \text{falls } r \geq 0 \text{ und } 0 \leq a \leq r, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Bestimmen Sie die Randdichte von R und die Randdichte von A.

d) Sind R und A unabhängig? Beweisen Sie die Unabhängigkeit oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[A \leq R/3]$.

Bitte wenden!

3. (10 Punkte) Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit gemeinsamen Wertebereich $\{1,2,3,4,5\}$. Ihre gemeinsame Verteilung ist gegeben durch

$$P[X_1 = i,\, X_2 = j] = \begin{cases} p, & \text{falls } i \neq j, \\ \frac{1}{5} - 4p, & \text{falls } i = j, \end{cases}$$

wobei $p \in (0, 1/20)$ und $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$.

a) Berechnen Sie die Verteilung von X_1 und die Verteilung von X_2.

b) Für welche Werte von p sind X_1 und X_2 unabhängig?

c) Berechnen Sie $P[X_1 + X_2 = k]$ für $k = 2$, $k = 5$ und $k = 6$.

Sei $\mu > 0$ und sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\mu}{x^2}, & \text{falls } x \geq \mu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, welche jeweils die gleiche Verteilung wie X haben.

d) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer μ_{MLE} von μ als Funktion von $X_1, \ldots, X_n$.

e) Folgende $n = 5$ unabhängigen Beobachtungen wurden von X gemacht:

i	1	2	3	4	5
x_i	12.8	22.50	56.2	12.7	73.9

Berechnen Sie anhand dieser Werte den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\mu}_{MLE}$ von μ.