Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. Seien F das Ereignis “Franz wählt eine faire Münze”, E das Ereignis “ Franz isst an der ETH-Mensa” und L das Ereignis “Franz wartet mehr als 10 Minuten”.

a) Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[E] &= \mathbb{P}[E \mid F] \cdot \mathbb{P}[F] + \mathbb{P}[E \mid F^c] \cdot \mathbb{P}[F^c] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

b) Wir wissen von Frage a), dass Franz zur ETH-Mensa mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$ geht, und folglich, dass er zur Uni-Mensa mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ geht. Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[L] &= \mathbb{P}[L \mid E] \cdot \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[L \mid E^c] \cdot \mathbb{P}[E^c] \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{16}{25}.\end{aligned}$$

c) Mit der Formel von Bayes gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[E^c \mid L^c] &= \frac{\mathbb{P}[L^c \mid E^c] \cdot \mathbb{P}[E^c]}{\mathbb{P}[L^c]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[L^c \mid E^c] \cdot (1 - \mathbb{P}[E])}{1 - \mathbb{P}[L]} \\ &= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{9}{25}} \\ &= \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

d) X ist eine Binomial verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\left(20, \frac{2}{5}\right)$. Ihr Erwartungswert ist $20 \cdot \frac{2}{5} = 8$.

e) (i) Der Likelihood für n Beobachtungen ist:

$$L\left(w_1, w_2, ..., w_n; \mu\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log(w_i) - \mu)^2}{2}\right).$$

Der Log-Likelihood für n Beobachtungen ist dann:

$$l\left(w_1, w_2, ..., w_n; \mu\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\log\left(w_i\sqrt{2\pi}\right) - \frac{(\log(w_i) - \mu)^2}{2}\right).$$

Um den ML Schätzer zu finden, berechnen wir die Abteilung von l bezüglich μ:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu}(w_1, w_2, ..., w_n; \mu) = \sum_{i=1}^{n} (\log(w_i) - \mu).$$

Dieser Ausdruck ist gleich null für

$$\mu^{\text{MLE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(w_i).$$

(ii) Mit den gegebenen Beobachtungen kriegen wir: $\mu^{\text{MLE}} = \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 1.5 + 2.5) = 2$.

2. a) X ist geometrisch mit Parameter p verteilt, also $\mathbb{P}[X = k] = p(1-p)^{k-1}$ für $k \geqslant 1$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[a^X] &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} a^k \\
&= \frac{p}{1-p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (a(1-p))^k - 1 \right) \\
&= \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1 - a(1-p)} - 1 \right) \\
&= \frac{pa}{1 - a(1-p)}.
\end{aligned}$$

b) Y ist Binomial mit Parameter (X, p) verteilt. Gegeben, dass $X = k$ ist, ist der Erwachtungswert von Y kp. Wir können deshalb rechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{l=0}^{\infty} l\mathbb{P}[Y = l] \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} l \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[Y = l \mid X = k] \cdot \mathbb{P}[X = k] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] \sum_{l=0}^{\infty} l\mathbb{P}[Y = l \mid X = k] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] \sum_{l=0}^{k} l\mathbb{P}[Y = l \mid X = k] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] \cdot \mathbb{E}[Y \mid X = k] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} kp \\
&= p\mathbb{E}[X] \\
&= p \cdot \frac{1}{p} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

c) Y ist Binomial mit Parameter (X, p) verteilt. Das heisst, Y kann nicht Werte grösser als X nehmen. Deshalb:

$$\mathbb{P}[X = n]\mathbb{P}[Y = n + 1] > 0 = \mathbb{P}[X = n, Y = n + 1],$$

und X und Y sind nicht unabhängig.

d) Wie im Skript:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y])^2] = \mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2,\\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^2] &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[Y^2 \mid X=k]\cdot\mathbb{P}[X=k]\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathrm{Var}[Y \mid X=k]+\mathbb{E}[Y \mid X=k]^2\right)\cdot\mathbb{P}[X=k]\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(kp(1-p)+k^2p^2)p(1-p)^{k-1}\\ &= p(1-p)\mathbb{E}[X]+p^2\mathbb{E}[X^2]\\ &= p(1-p)\cdot\frac{1}{p}+p^2\left(\mathrm{Var}[X]+\mathbb{E}\left[X\right]^2\right)\\ &= (1-p)+p^2\left(\frac{1-p}{p^2}+\frac{1}{p^2}\right)\\ &= 3-2p.\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2=3-2p-1=2(1-p).$$

Weiter,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[XY \mid X=k]\cdot\mathbb{P}[X=k]\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}k\cdot kp\cdot p(1-p)^{k-1}\\ &= p\mathbb{E}[X^2]\\ &= \frac{2-p}{p},\end{aligned}$$

und daraus folgt,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]=\frac{2-p}{p}-\frac{1}{p}\cdot 1=\frac{1-p}{p}.$$

e) Die beste lineare Prognose von Y durch X ist die Zufallsvariable Z gegeben durch:

$$\begin{aligned}Z &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}\left(X-\mathbb{E}[X]\right)+\mathbb{E}[Y]\\ &= \frac{\frac{1-p}{p}}{\frac{1-p}{p^2}}\left(X-\frac{1}{p}\right)+1\\ &= pX.\end{aligned}$$

3. a) Wenn $f_{(X,Y)}$ eine Dichte ist, dann muss es gelten:

$$\begin{aligned}1 &= \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} c\frac{y}{x^5}\mathbb{1}_{\{y\leqslant x\}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{\infty}\int_1^{x} c\frac{y}{x^5}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{\infty}\frac{c}{2x^3}-\frac{c}{2x^5}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{c}{2}\left[\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{\infty}\\ &= \frac{c}{8}.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Es folgt, dass $c = 8$.

b) Die Randdichte von X ist:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_1^x \frac{8y}{x^5}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{8}{2x^3} - \frac{8}{2x^5} \\ &= \frac{4}{x^3} - \frac{4}{x^5}, \end{aligned}$$

und ihr Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_1^\infty x f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty x\left(\frac{4}{x^3} - \frac{4}{x^5}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty \left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^4}\right)\mathrm{d}x \\ &= 4\left[\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x}\right]_1^\infty \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

c) Die Randdichte von Y ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^{+\infty} \frac{8y}{x^5}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{8y}{4x^4}\right]_y^\infty \\ &= \frac{2}{y^3}. \end{aligned}$$

Wir können sehen, dass $f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, also sind X und Y nicht unabhängig.

d) Die Verteilungsfunktion von Y ist $F_Y(y) = 0$ falls $y \leqslant 1$ und :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}[Y \leqslant y] \\ &= \int_1^y f_Y(z)dz \\ &= \int_1^y \frac{2}{z^3}dz \\ &= \left[-\frac{1}{z^2}\right]_1^y \\ &= \left(1 - \frac{1}{y^2}\right), \end{aligned}$$

sonst.