Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. Es gilt $P[U_1] = \frac{1}{3}$ und $P[U_2] = \frac{2}{3}$.

a) Gesucht ist $P[U_2 | X = 1]$. Laut Aufgabenstellung gilt

$$\begin{aligned} P[X = k | U_1] &= \binom{2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k} \qquad k = 0, 1, 2; \\ P[X = l | U_2] &= \binom{2}{l} \left(\frac{1}{3}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{2-l} \qquad l = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Nach der Formel von Bayes gilt

$$\begin{aligned} P[U_2 | X = 1] &= \frac{P[X = 1 | U_2] P[U_2]}{P[X = 1 | U_1] P[U_1] + P[X = 1 | U_2] P[U_2]} \\ &= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{2 \cdot 8}{9 + 2 \cdot 8} = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

b) Wir suchen die Wahrscheinlichkeit vom Ereignis $E = \{X = 0 \text{ oder } X = 2\} = \{X = 0\} \cup \{X = 2\}$. Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} P[E] &= P[X = 0] + P[X = 2] \\ &= P[X = 0 | U_1] P[U_1] + P[X = 2 | U_1] P[U_1] \\ &\qquad + P[X = 0 | U_2] P[U_2] + P[X = 2 | U_2] P[U_2] \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \\ &= \frac{9 + 20}{54} = \frac{29}{54} \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{2} k P[X = k] \\ &= \sum_{k=1}^{2} k\left(\frac{1}{3} P[X = k | U_1] + \frac{2}{3} P[X = k | U_2]\right) = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Wegen $2 = X + Y$ gilt

$$E[Y + 2X] = E[Y + X + X] = E[2 + X] = 2 + E[X] = \frac{25}{9}.$$

2. **a)** Es muss gelten, dass

$$\int_0^1 f_X(x)dx = 1,$$

also

$$\int_0^1 (cx + \frac{1}{4})dx = \frac{c}{2} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

b) Für den Erwartungswert von X gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4})dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 x dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4})dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

Für die Varianz von X erhalten wir somit

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{11}{24} - \frac{25}{64} = \frac{88}{192} - \frac{75}{192} = \frac{13}{192}.$$

c) Wir haben

$$\begin{aligned} P[X \leq 1/2] &= \int_{-\infty}^{1/2} f_X(x)dx = \int_0^{1/2} (\frac{3}{2}x + \frac{1}{4})dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^{1/2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

d) Die Randdichte f_X von X ist gegeben durch $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f_{(X,Y)}(x,y)$. Für $x < 0$ und $x > 1$ gilt $f_X(x) = 0$, für $x \in [0,1]$ erhält man

$$f_X(x) = \int_0^1 (x^2 + 2y^2)dy = x^2 + \frac{2}{3}.$$

Der Erwartungswert von X beträgt

$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 (x^3 + \frac{2}{3}x)dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

e) Man erhält

$$P[Y \leq X] = \int_0^1 dx \int_0^x dy(x^2 + 2y^2) = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{2x^3}{3}\right)dx = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

3. **a)** Die Nullhypothese wird so gewählt, dass das, was man selbst beweisen will, in der Gegenhypothese steht. Das Pharmainstitut versucht natürlich zu beweisen, dass das Medikament gut ist.

Die Nullhypothese ist dann:

$$H_0 : p < 0.8,$$

was bedeutet, dass das Medikament mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit als 0.8 wirkt.

Die Gegenhypothese ist

$$H_1 : p \geq 0.8,$$

Siehe nächstes Blatt!

also dass das Medikament mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% wirkt. Es gilt also

$$P_{0.8}^{50}(X \geq k) \leq 0.05 \Leftrightarrow 1 - P_{0.8}^{50}(X \leq k-1) \leq 0.05 \Leftrightarrow P_{0.8}^{50}(X \leq k-1) \geq 0.95.$$

Die Tabelle gibt den folgenden Wert an

$$P_{0.8}^{50}(X \leq 44) = 0.95197 \Rightarrow k - 1 \geq 44.$$

Die Nullhypothese wird also bei 44 oder wenigern Treffern im Test, also Personen bei denen das Medikament wirkt, angenommen und bei 45 oder mehr abgelehnt.

Im Test wirkte das Medikament bei 45 Personen, das liegt für das Pharmainstitut im günstigen Ablehnungsbereich.

Das Ergebnis der Testreihe ist damit statistisch signifikant bewiesen.

b) Die Nullhypothese wird so gewählt, dass das, was man selbst beweisen will, in der Gegenhypothese steht. Hier wir wird versucht zu überprüfen, ob das Medikament nicht doch schlechter wirkt, als behauptet.

Die Nullhypothese ist somit

$$H_0 : p \geq 0.8,$$

also dass das Medikament mit 80% Wahrscheinlichkeit oder mehr wirkt.

Die Gegenhypothese lautet

$$H_1 : p < 0.8$$

Aus der Tabelle lesen wir raus

$$P_{0.8}^{50}(X \leq 34) = 0.03080$$

und

$$P_{0.8}^{50}(X \leq 35) = 0.06072 \Rightarrow k \leq 34$$

Die Nullhypothese wird bei 34 oder weniger Patienten, bei denen das Medikament wirkt, abgelehnt und demnach bei 35 oder mehr Patienten angenommen.

c) Der Anteil der Befürworter des Rauchverbots in der Bevölkerung soll mit p bezeichnet werden, also lautet die Nullhypothese

$$H_0 : p \leq 0.6$$

Es werden 100 Personen zufällig ausgewählt und befragt. Wir definieren

$$Z = \text{Anzahl der Rauchverbot-Befürworter unter den befragten Personen.}$$

Dieses Z ist binomialverteilt nach $B(100; 0.6)$.
Man wird sich für H_0 entscheiden, wenn nicht zuviele der 100 befragten Personen das Rauchverbot befürworten. Wir schreiben

$$K = \{k; ....; 100\} \text{ und } \bar{K} = \{0; 1; ....; k-1\}.$$

Hier ist k die kleinste Zahl, für die $P_{0.6}^{100}(Z \geq k) \leq 0.05$ gilt. Hieraus folgt

$$F_{0.6}^{100}(k-1) \geq 0.95,$$

was einen Tabellenwert von $k = 69$ ergibt, und folglich

$$K = \{69; ....; 100\} \text{ und } \bar{K} = \{0; 1; ....; 68\}.$$

Somit lautet die Entscheidungsregel: Wenn mindestens 69 der befragten Personen das Rauchverbot befürworten, wird die Vermutung abgelehnt