

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (8 Punkte) Wir betrachten zwei Urnen U_1 und U_2 . Die Urne U_1 enthält 2 schwarze und 2 rote Kugeln. Die Urne U_2 enthält 2 schwarze Kugeln und 4 rote Kugeln. $P[U_1] = \frac{1}{3}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit Urne U_1 zu wählen und $P[U_2] = \frac{2}{3}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit Urne U_2 zu wählen. Man wählt nun zufällig eine Urne und zieht dann aus der gewählten Urne 2 Kugeln nacheinander zufällig *mit* Zurücklegen. X bezeichnet die Anzahl gezogener schwarzer Kugeln und Y die Anzahl gezogener roter Kugeln.

- a) Falls genau eine der gezogenen Kugeln schwarz ist, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Urne U_2 gewählt wurde?
- b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle zwei gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.
- c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E[X]$ und $E[Y + 2X]$.

2. (12 Punkte) Wir betrachten das Intervall $T = [0, 1]$ und eine Zufallsvariable X . Die Dichte von X sei

$$f_X(x) = \begin{cases} cx + \frac{1}{4}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $f_X(x)$ eine Verteilungsdichte beschreibt.
- b) Wählen Sie nun $c = \frac{3}{2}$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .
- c) Berechnen Sie $P[X \leq \frac{1}{2}]$ für $c = \frac{3}{2}$.

Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- d) Berechnen Sie die Randdichte und den Erwartungswert von X .
- e) Berechnen Sie $P[Y \leq X]$.

Bitte wenden!

3. (10 Punkte) Ein Pharmainstitut behauptet, ein bestimmtes Medikament wirke mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80%. Daraufhin wird das Medikament an 50 Personen verabreicht.

- a) In dieser ersten Testreihe zeigt das Mittel bei 45 der 50 Personen Wirkung. Ist damit die Behauptung des Pharmainstituts auf dem Signifikanzniveau von 5% statistisch bewiesen?
- b) Einige Zeit, nachdem das neue Medikament zugelassen ist, bekommt der angesehene Medizinprofessor Zweifel den Verdacht, das Pharmainstitut habe die Studie gefälscht und das Mittel wirke doch nicht so gut wie behauptet. Er lässt daraufhin erneut einen Test an 50 Personen durchführen. Formuliere für Professor Zweifels Test Nullhypothese und Gegenhypothese. Wie muss seine Entscheidungsregel lauten, wenn er seine Vermutung auf dem Signifikanzniveau von 5% statistisch belegen will?

Es wird vermutet, dass der Anteil der Befürworter des Rauchverbots in der Bevölkerung gegenwärtig bei höchstens 60% liegt. Um diese Vermutung zu testen, wird eine Befragung von 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt.

- c) Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst grossen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5% irrtümlich abgelehnt werden soll?