Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe ist bei jeder Frage genau eine Antwort richtig. (Single choice)

Für die ersten zwei Fragen sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, und wir bezeichnen mit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ das Laplace-Modell auf Ω.

1.MC1 [1 Punkt] Wie viele Mengen gibt es in $\mathcal{F}$?

(A) $|\mathcal{F}| = 3$.
(B) $|\mathcal{F}| = 4$.
(C) **TRUE:** $|\mathcal{F}| = 8$.
(D) $|\mathcal{F}| = 10$.

Lösung:

Wir haben
$$|\mathcal{F}| = 2^{|\Omega|} = 2^3 = 8.$$

1.MC2 [1 Punkt] Wir definieren eine Zufallsvariable X auf Ω durch $X(\omega_1) = 0$, $X(\omega_2) = 1$ und $X(\omega_3) = 1$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) X hat eine Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p = 1/2$.
(B) $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}$.
(C) **TRUE:** $F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ 1/3, & a \in [0,1), \\ 1, & a \in [1,\infty). \end{cases}$
(D) $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{3}$.

Lösung:

Da $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}[X = 1] = \frac{2}{3}$ ist, haben wir
$$F_X(a) = \mathbb{P}[X \leq a] = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ 1/3, & a \in [0,1), \\ 1, & a \in [1,\infty). \end{cases}$$

Für die nächsten zwei Fragen sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion
$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a \in (-\infty, 0), \\ \frac{1}{3}, & a \in [0,1), \\ \frac{1}{2}, & a \in [1,3), \\ 1, & a \in [3,\infty). \end{cases}$$

1.MC3 [1 Punkt] Was ist der Erwartungswert von X?

(A) **TRUE:** $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{3}$.
(B) $\mathbb{E}[X] = 1$.
(C) $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{4}$.
(D) $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{2}$.

Lösung:

Wir haben

$$\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}[X = 1] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}[X = 3] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$\mathbb{E}[X] = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{3}.$$

1.MC4 [1 Punkt] Was ist die Varianz von X?

(A) $\mathrm{Var}[X] = \frac{25}{9}$.
(B) **TRUE:** $\mathrm{Var}[X] = \frac{17}{9}$.
(C) $\mathrm{Var}[X] = \frac{17}{19}$.
(D) $\mathrm{Var}[X] = \frac{5}{9}$.

Lösung:

Wir haben

$$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{2} = \frac{14}{3}.$$

Dies ergibt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{14}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{17}{9}.$$

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe liegt für jede Frage die Anzahl der richtigen Antworten zwischen 0 und 4. (Multiple choice)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_N$, wobei $N \geq 4$, unabhängige Zufallsvariablen mit wohldefinierten Erwartungswerten und Varianzen.

2.MC1 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(A) **TRUE:** $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X_i]$.

(B) **TRUE:** $\mathrm{Var}[\sum_{i=1}^N X_i] = \sum_{i=1}^N \mathrm{Var}[X_i]$.

(C) **TRUE:** $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}(X_3, X_4)$.

(D) $\mathrm{Var}[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathrm{Var}[X_i]$.

Lösung:

(A) ist aufgrund der Linearität des Erwartungswertes wahr.
(B) ist aufgrund der Unabhängigkeit wahr.
(C) ist wahr, da $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$ und $\mathrm{Cov}(X_3, X_4) = 0$ aufgrund der Unabhängigkeit.
(D) ist **nicht** im Allgemeinen wahr. Wir haben $\mathrm{Var}[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \mathrm{Var}[X_i]$.

2.MC2 [2 Punkte] Nehmen wir an, dass $X_1, X_2, \ldots, X_N$ zusätzlich identisch verteilt sind. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(A) $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i] = \mathbb{E}[X_1]$.

(B) **TRUE:** $\mathrm{Var}[\sum_{i=1}^N X_i] = N\mathrm{Var}[X_1]$.

(C) $\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

(D) **TRUE:** $\mathrm{Var}[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i] = \frac{1}{N}\mathrm{Var}[X_1]$.

Lösung:

(A) ist **nicht** im Allgemeinen wahr.
(B) ist wahr.
(C) ist **nicht** im Allgemeinen wahr.
(D) ist wahr.

Für die nächste Frage sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \sin(a), & a \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 1, & a \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2.MC3 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) Die Zufallsvariable X hat keine Dichte.

(B) Die Dichte von X ist gegeben durch $f_X(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(C) **TRUE:** $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

(D) **TRUE:** $\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\cos(X)}\Big] = \pi/2$.

Lösung:

(A) ist **nicht** wahr.
(B) ist **nicht** wahr. Durch Differentiation der Verteilungsfunktion erhalten wir die Dichte $f_X(x) = \cos(x)\mathbf{1}_{[0,\pi/2]}(x)$.
(C) ist wahr, weil $\mathbb{P}[X \in [0, \pi/2]] = 1$.
(D) ist wahr, weil

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\cos(X)}\Big] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cos(x)} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \pi/2.$$

Für die nächste Frage sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

2.MC4 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(A) Wenn $A, B \in \mathcal{F}$ so sind, dass $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 0.5$, dann ist $\mathbb{P}[A \cup B] = 1$.

(B) **TRUE:** Wenn $A, B \in \mathcal{F}$ unabhängig sind, dann ist $\mathbb{P}[A^c \cap B] = (1 - \mathbb{P}[A])\mathbb{P}[B]$.

(C) **TRUE:** Für jedes $A \in \mathcal{F}$ sind die Ereignisse A und $\emptyset$ unabhängig.

(D) **TRUE:** Wenn $A, B \in \mathcal{F}$ disjunkt sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$, dann sind A und B nur dann unabhängig, wenn $\mathbb{P}[A] = 0$ oder $\mathbb{P}[B] = 0$.

Lösung:

(A) ist offensichtlich nicht wahr. Ist zum Beispiel $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A] = 0.5$ und $B = A$, dann ist $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 0.5$ und $\mathbb{P}[A \cup B] = 0.5$.
(B) ist wahr, wie in Aufgabe 5-3 der Übungen gesehen wurde.
(C) ist wahr, weil $\mathbb{P}[A \cap \emptyset] = 0 = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[\emptyset]$.
(D) ist wahr. Weil $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0$, kann die Gleichheit $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ nur gelten, wenn $\mathbb{P}[A] = 0$ oder $\mathbb{P}[B] = 0$.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe ist bei jeder Frage genau eine Antwort richtig. (Single choice)

Wir haben zwei identische Schubladen mit Münzen. Schublade Nummer 1 enthält drei Münzen im Wert von jeweils 1 CHF, 2 CHF und 5 CHF. Schublade Nummer 2 enthält vier Münzen im Wert von jeweils 1 CHF, 2 CHF, 5 CHF und 5 CHF.

Wir wählen zufällig (mit gleichen Wahrscheinlichkeiten) eine Schublade aus, und aus dieser Schublade wählen wir dann zufällig eine Münze aus (was bedeutet, dass alle Münzen in der gewählten Schublade mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden).

3.MC1 [1 Punkt] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine 5-CHF-Münze erhalten?

(A) **TRUE:** $\frac{5}{12}$.
(B) $\frac{3}{7}$.
(C) $\frac{2}{7}$.
(D) $\frac{1}{2}$.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\text{“5CHF”}] &= \mathbb{P}[\text{“5CHF”}|\text{“Schublade 1”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 1”}] \\ &\quad + \mathbb{P}[\text{“5CHF”}|\text{“Schublade 2”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 2”}] \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

3.MC2 [1 Punkt] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine 2-CHF-Münze erhalten?

(A) **TRUE:** $\frac{7}{24}$.
(B) $\frac{5}{12}$.
(C) $\frac{2}{7}$.
(D) $\frac{3}{7}$.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\text{“2CHF”}] &= \mathbb{P}[\text{“2CHF”}|\text{“Schublade 1”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 1”}] \\ &\quad + \mathbb{P}[\text{“2CHF”}|\text{“Schublade 2”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 2”}] \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{24}.\end{aligned}$$

3.MC3 [1 Punkt] Angenommen, wir wissen, dass wir eine Münze im Wert von 2 CHF oder mehr erhalten haben. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Münze aus Schublade Nummer 1 ausgewählt haben?

(A) **TRUE:** $\frac{8}{17}$.

(B) $\frac{7}{13}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{7}{12}$.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\text{“Schublade 1”}|\text{“2CHF oder 5CHF”}] &= \frac{\mathbb{P}[\text{“Schublade 1” und “2CHF oder 5CHF”}]}{\mathbb{P}[\text{“2CHF oder 5CHF”}]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[\text{“2CHF oder 5CHF”}|\text{“Schublade 1”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 1”}]}{\mathbb{P}[\text{“2CHF”}] + \mathbb{P}[\text{“5CHF”}]} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{24} + \frac{5}{12}} \\
&= \frac{8}{17}.
\end{aligned}$$

3.MC4 [1 Punkt] Wir definieren die Ereignisse

$$\begin{aligned}A &= \{\text{“die ausgewählte Münze hat den Wert 2 CHF”}\},\\ B &= \{\text{“wir wählen Schublade Nummer 1”}\},\\ C &= \{\text{“wir wählen Schublade Nummer 2”}\}.\end{aligned}$$

Entscheiden Sie, welche Paare dieser Ereignisse unabhängig sind.

(A) **TRUE:** Keines der Paare ist unabhängig.
(B) Nur B und C sind unabhängig.
(C) Nur die Paare A, B und A, C sind unabhängig.
(D) Alle Paare sind unabhängig.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[A] = \frac{7}{24}, \quad \mathbb{P}[B] = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}[C] = \frac{1}{2},\\ &\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \neq \frac{7}{48} = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B],\\ &\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A|C]\mathbb{P}[C] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq \frac{7}{48} = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[C],\\ &\mathbb{P}[B \cap C] = 0 \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[C].\end{aligned}$$

Somit sind keine der Paare unabhängig.

3.MC5 [1 Punkt] Was ist der erwartete Geldbetrag, den wir erhalten?

(A) **TRUE:** $\frac{71}{24}$.
(B) $\frac{27}{12}$.
(C) $\frac{3}{5}$.
(D) $\frac{31}{12}$.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\text{“1CHF”}] &= \mathbb{P}[\text{“1CHF”}|\text{“Schublade 1”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 1”}]\\ &\quad + \mathbb{P}[\text{“1CHF”}|\text{“Schublade 2”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 2”}] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24},\\ \mathbb{P}[\text{“2CHF”}] &= \mathbb{P}[\text{“2CHF”}|\text{“Schublade 1”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 1”}]\\ &\quad + \mathbb{P}[\text{“2CHF”}|\text{“Schublade 2”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 2”}] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24},\\ \mathbb{P}[\text{“5CHF”}] &= \mathbb{P}[\text{“5CHF”}|\text{“Schublade 1”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 1”}]\\ &\quad + \mathbb{P}[\text{“5CHF”}|\text{“Schublade 2”}]\mathbb{P}[\text{“Schublade 2”}] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Also folgt

$$\mathbb{E}[\text{“Geldbetrag”}] = 1 \times \frac{7}{24} + 2 \times \frac{7}{24} + 5 \times \frac{5}{12} = \frac{71}{24}.$$

Aufgabe 4

Seien X und Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = 2\mathbf{1}_{[0,y]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } 0 \le x \le y \text{ und } 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

4.A1 [1.5 Punkte] Finden Sie die Randdichten von X und Y.

Lösung:

Wir haben

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y \\ &= 2\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\int_x^1 \mathrm{d}y \\ &= 2(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ähnlich ist

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x \\ &= 2\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\int_0^y \mathrm{d}x \\ &= 2y\mathbf{1}_{[0,1]}(y), \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.A2 [2 Punkte] Berechnen Sie $\mathbb{E}[XY^2]$.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY^2] &= \iint xy^2 f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1\int_0^y xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1 y^2\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y^4\mathrm{d}y \\ &= \frac{y^5}{5}\Big|_{y=0}^1 \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

4.A3 [1.5 Punkte] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[\alpha X \le Y]$ für $\alpha \ge 1$.

Lösung:

Wegen $\alpha \geq 1$ ist für $x \leq y/\alpha$ auch $x \leq y$. Also haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\alpha X \leq Y] &= \mathbb{P}[X \leq Y/\alpha] \\
&= \iint \mathbf{1}_{[0,y/\alpha]}(x) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_0^{y/\alpha} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 2\frac{y}{\alpha}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Alternative Lösung: Wegen $\alpha \geq 1$ ist $\alpha x \leq 1$ nur für $x \leq 1/\alpha \leq 1$. Also haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\alpha X \leq Y] &= \iint \mathbf{1}_{[\alpha x,1]}(y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \int_{\alpha x}^1 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{\alpha}} 2(1-\alpha x)\mathrm{d}x \\
&= 2\frac{1}{\alpha} - 2\alpha \int_0^{\frac{1}{\alpha}} x\mathrm{d}x \\
&= 2\frac{1}{\alpha} - 2\alpha\frac{1}{2\alpha^2} \\
&= \frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Seien $X_1, \ldots, X_{100}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i^2)$. Dabei ist $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt, aber $\sigma_i^2 > 0$ für $i \in \{1, \ldots, 100\}$ sind bekannte Parameter.

5.A1 [2.5 Punkte] Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für μ. Sie müssen **nicht** überprüfen, ob der gefundene Punkt tatsächlich ein Maximum ist.

Lösung:

Wir haben

$$L(x_1, \ldots, x_{100}; \mu) = \prod_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\Big(- \frac{1}{2} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_i^2} \Big).$$

Damit ist

$$\log L(x_1, \ldots, x_{100}; \mu) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{100} \log(2\pi\sigma_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{100} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_i^2}.$$

Also haben wir

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log L(x_1, \ldots, x_{100}; \mu) = \sum_{i=1}^{100} \frac{x_i - \mu}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{100} \frac{x_i}{\sigma_i^2} - \mu \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Dies ist gleich 0 genau dann, wenn

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{100} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sigma_i^2}}.$$

Also erhalten wir die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion

$$\widehat{\mu}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{100} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sigma_i^2}},$$

und somit ist der Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\mu}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{100} \frac{X_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sigma_i^2}}$.

In den restlichen Teilen dieser Aufgabe möchten wir testen, ob μ von Null verschieden ist.

5.A2 [0.5 Punkte] Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese.

Lösung:

Wir setzen

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{H}_1 : \mu \neq 0.$$

5.A3 [2 Punkte] Finden Sie eine geeignete Teststatistik und deren Verteilung unter der Nullhypothese. “Geeignet” bedeutet hier, dass die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese bekannt ist und von keinem Parameter abhängt.

Lösung:

Unter H_0 haben wir $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$.

Aufgrund der Unabhängigkeit erhalten wir somit unter H_0

$$T_{100} \coloneqq \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}} = 10 \frac{\bar{X}_{100}}{\sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

wobei $\bar{X}_{100} \coloneqq \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$.

5.A4 [3 Punkte] Finden Sie den kritischen Bereich (d.h. beschreiben Sie das Testverfahren) für das Signifikanzniveau 5%.

Lösung:

Wir lehnen die Nullhypothese ab, wenn T_{100} zu weit weg von 0 ist. Also berechnen wir

$$\mathbb{P}_0[T_{100} \notin (-c, c)] = \mathbb{P}_0[T_{100} \geq c] + \mathbb{P}_0[T_{100} \leq -c] = (1 - \Phi(c)) + \Phi(-c) = 2(1 - \Phi(c)).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0[T_{100} \notin (-c, c)] = 0.05 &\iff 2(1 - \Phi(c)) = 0.05 \\
&\iff \Phi(c) = 1 - \frac{0.05}{2} \\
&\iff \Phi(c) = 0.975 \\
&\iff c = \Phi^{-1}(0.975) \\
&\iff c = 1.96.
\end{aligned}$$

Wir erhalten, dass der kritische Bereich für T_{100} gleich $(-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$ ist, oder, äquivalent, der kritische Bereich für $\sum_{i=1}^{100} X_i$ ist $\Big(-\infty, -1.96\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}\Big] \cup \Big[1.96\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}, \infty\Big)$ oder, äquivalent, der kritische Bereich für $\bar{X}_{100}$ ist $\Big(-\infty, -\frac{1.96}{100}\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}\Big] \cup \Big[\frac{1.96}{100}\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}, \infty\Big)$.

Anders ausgedrückt: wir lehnen die Nullhypothese ab, wenn $|T_{100}| \geq 1.96$ oder, äquivalent, wir lehnen die Nullhypothese ab, wenn $|\sum_{i=1}^{100} X_i| \geq 1.96\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}$ oder, äquivalent, wir lehnen die Nullhypothese ab, wenn $|\bar{X}_{100}| \geq \frac{1.96}{100}\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}$.

Quantiltabelle der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung

0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
0	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

Zum Beispiel ist $\Phi^{-1}(0.9) = 1.2816$.