Musterlösung

1. **a)** Wir bezeichnen mit X die Augenzahl, die beim Würfeln gefallen ist. Ferner definieren wir die Zufallsvariable G durch

$$G_i := \begin{cases} 1, & \text{gefälschter Würfel gewählt,} \\ 0, & \text{fairer Würfel gewählt.} \end{cases}$$

Mit der Formel von Bayes bekommt man:

$$P[G = 1|X = 6] = \frac{P[X = 6|G = 1]P[G = 1]}{P[X = 6|G = 1]P[G = 1] + P[X = 6|G = 0]P[G = 0]}$$

wobei

$$P[X = 6|G = 1]P[G = 1] + P[X = 6|G = 0]P[G = 0] = \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

ist. Somit ist

$$P[G = 1|X = 6] = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

b) Es gilt, dass

$$q := P[X = 6] = \frac{p}{3} + \frac{1-p}{6} = \frac{p+1}{6} = \frac{2}{9}.$$

Dann haben wir, dass $P[T = k] = (1 - q)^{k-1}q$, d.h. T ist geometrisch verteilt mit Parameter q. Analog zur Vorlesung können wir dann berechnen, dass für $z := 1-q$ gilt:

$$\begin{aligned} E[T] = \sum_{k\geq 1} kP[T = k] = \sum_{k\geq 1} k(1-q)^{k-1}q = q\sum_{k\geq 1} k(1-q)^{k-1} &= q\sum_{k\geq 1} kz^{k-1} \\ &= q\left(\sum_{k\geq 1} kz^k\right)' \\ &= q\left(\frac{1}{1-z}\right)' \\ &= q\frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \frac{1}{q} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) Wir bezeichnen mit A das Ereignis, dass bei den zwei Würfen 6 fällt.
1. Lösung: Für $i = 1, 2$ sei A_i das Ereignis, dass beim i-ten Wurf ein 6 fällt. Es ist leicht zu sehen, dass A_i, $i = 1, 2$, unabhängig sind, und

$$P[A_i] = P[X = 6] = \frac{2}{9}.$$

Das impliziert, dass

$$P[A] = P[A_1 \cap A_2] = P[A_1]P[A_2] = \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}.$$

2. Lösung: Wir definieren G_i für $i = 1, 2$ durch

$$G_i := \begin{cases} 1, & i\text{-te Würfel gefälscht,} \\ 0, & i\text{-te Würfel fair.} \end{cases}$$

Es ist leicht zu rechnen, dass

$$P[A|G_1 = 0, G_2 = 0] = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}.$$

Analog bekommen wir, dass

$$P[A|G_1 = 0, G_2 = 1] = P[A|G_1 = 1, G_2 = 0] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18},$$
$$P[A|G_1 = 1, G_2 = 1] = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Andererseits können wir berechnen, dass

$$P[G_1 = 0, G_2 = 0] = P[G_1 = 0]P[G_2 = 0] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$
$$P[G_1 = 0, G_2 = 1] = P[G_1 = 0]P[G_2 = 1] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$
$$P[G_1 = 1, G_2 = 0] = P[G_1 = 1]P[G_2 = 0] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9},$$
$$P[G_1 = 1, G_2 = 1] = P[G_1 = 1]P[G_2 = 1] = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit bekommen wir endlich:

$$P[A] = \sum_{i,j=0}^{1} P[A|G_1 = i, G_2 = j] \cdot P[G_1 = i, G_2 = j] = \frac{1}{36} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{81}.$$

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** Es soll gelten, dass

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} F(t) = 1.$$

Aus der ersten Bedingung bekommen wir

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{1+\lambda t^2}{1-15t} = \lambda \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{1-15t},$$

und das ist gleich 0 nur, falls $\lambda = 0$. Andererseits ist es leicht zu rechnen, dass

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} F(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{c}{t} \int_0^t \frac{x}{1+x} dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{c}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \lim_{t\to\infty} = \frac{1}{2} + \frac{c}{t}\left(t - \log\left(1+t\right)\right) = \frac{1}{2} + c, \end{aligned}$$

und damit $c = \frac{1}{2}$.

b) Wir können rechnen, dass

$$\begin{aligned} P\left[X = -\frac{1}{4}\right] &= F\left(-\frac{1}{4}\right) - F\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^-\right) = 0, \\ P[X=0] &= F(0) - F(0^-) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}, \\ P[0 < X \le 2] &= F(2) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \\ P\left[0 \le X < \frac{1}{2}\right] &= F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^-\right) - F\left(0^-\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

c) Für $t \in (0,1]$ haben wir

$$\begin{aligned} P\left[Y \le t\right] = P\left[X^2 \le t\right] &= P\left[X \in \left[-\sqrt{t}, \sqrt{t}\right]\right] = F(\sqrt{t}) - F((-\sqrt{t})^-) \\ &= F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t}) = \left(\frac{\sqrt{t}}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{-\sqrt{t}}{16} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{16}\sqrt{t} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Für $t = 0$ bekommen wir hingegen

$$P\left[Y \le 0\right] = P\left[X = 0\right] = \frac{1}{8}.$$

Bitte wenden!

3. **a)** Sei F_{Z_1} die Verteilungsfunktion von Z_1, und $a \in \mathbb{R}$. Dann:

$$F_{Z_1}(a) = P[\log(Y+1) \leq a] = P[Y+1 \leq e^a] = P[Y \leq e^a - 1],$$

was impliziert, dass

$$F_{Z_1}(a) = \begin{cases} 0, & a < \log(2), \\ e^a - 2, & \log(2) \leq a \leq \log(3), \\ 1, & a > \log(3). \end{cases}$$

Sei jetzt f_{Z_1} die Dichte von Z_1. Dann:

$$f_{Z_1}(a) = \frac{d}{da} F_{Z_1}(a) = \begin{cases} e^a, & \log(2) \leq a \leq \log(3), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Sei Z die beste lineare Prognose von Z_3 durch X. Nach der Vorlesung wissen wir, dass Z gegeben ist durch

$$Z = \frac{\mathrm{Cov}(X, Z_3)}{\mathrm{Var}(X)}(X - E[X]) + E[Z_3].$$

Mit Hilfe der partiellen Integration können wir leicht verifizieren, dass

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1, \\ E[X^2] &= \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-x} dx = 2, \end{aligned}$$

und deshalb

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 1.$$

(Alternativ kann man auch die bekannte Formeln $E[L] = \frac{1}{\lambda}$ und $\mathrm{Var}[L] = \frac{1}{\lambda^2}$ für $L \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ anwenden). Andererseits haben wir, dass

$$E[Z_3] = E[X]E[Y] = E[Y] = \int_1^2 y dy = \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}.$$

Endlich bekommen wir, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Z_3) = E[XZ_3] - E[X]E[Z_3] &= E[X^2]E[Y] - E[X]^2 E[Y] \\ &= \mathrm{Var}[X]E[Y] = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Das ergibt, dass

$$Z = \frac{3}{2}(X-1) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}X.$$

c) Wir können leicht verifizieren, dass

$$
\begin{aligned}
P[X + Z_1 \leq 2] = P[X \leq 2 - \log(Y+1)] &= \int_1^2 \int_0^{2-\log(y+1)} e^{-x} dx dy \\
&= \int_1^2 (-e^{-x})\Big|_0^{2-\log(y+1)} dy \\
&= \int_1^2 \left(1 - \frac{y+1}{e^2}\right) dy \\
&= 1 - \frac{1}{e^2} - \left(\frac{y^2}{2e^2}\right)\Big|_1^2 = 1 - \frac{5}{2e^2}.
\end{aligned}
$$

Wir bezeichnen jetzt mit F_{Z_2} die Verteilungsfunktion von Z_2. Für $a \leq 0$ haben wir offensichtlich $F_{Z_2}(a) = 0$. Sei also $a > 0$. Dann:

$$
\begin{aligned}
F_{Z_2}(a) = P\left[\frac{X}{Y} \leq a\right] = P\left[X \leq aY\right] &= \int_1^2 \int_0^{ay} e^{-x} dx dy \\
&= \int_1^2 (-e^{-x})\Big|_0^{ay} dy \\
&= \int_1^2 (1 - e^{-ay}) dy \\
&= 1 + \frac{1}{a} e^{-ay}\Big|_1^2 = 1 + \frac{1}{a}(e^{-2a} - e^{-a}).
\end{aligned}
$$