Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Wir betrachten ein Würfelspiel. Vor *jedem* Wurf wird dem Spieler mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ ein gefälschter Würfel und mit Wahrscheinlichkeit $(1-p) = \frac{2}{3}$ ein fairer Würfel gegeben, mit dem er *nur* einmal würfelt und danach den Würfel zurückgibt. Beim gefälschten Würfel kommt die Augenzahl 6 mit Wahrscheinlichkeit $P[X = 6] = \frac{1}{3}$ vor und alle anderen Augenzahlen $1, \dots, 5$ mit derselben Wahrscheinlichkeit. Beim fairen Würfel kommt jede Augenzahl $1, \dots, 6$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor.

a) Angenommen, beim einmaligen Würfeln ist eine 6 gefallen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mit einem gefälschten Würfel gewürfelt wurde?

b) Es wird so lange auf die oben beschriebene Art gewürfelt, bis die erste 6 fällt. Wir bezeichnen mit T den Zeitpunkt, bei dem zum ersten Mal eine 6 fällt. Berechnen Sie die erwartete Zeit $E[T]$.

c) Nun wird auf die oben beschriebene Art zweimal gewürfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei allen zwei Würfen die Augenzahl 6 fällt.

2. (10 Punkte) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F, wobei

$$F(t) := \begin{cases} \frac{1+\lambda t^2}{1-15t}, & t < -1, \\ \frac{t}{16} + \frac{1}{8}, & -1 \leq t < 0, \\ \frac{t}{4} + \frac{1}{4}, & 0 \leq t < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq t < 3, \\ \frac{1}{2} + \frac{c}{t} \int_0^t \frac{x}{1+x} dx, & t \geq 3. \end{cases}$$

Berechnen Sie:

a) die Konstanten λ und c.

b) $P[X = -\frac{1}{4}]$, $P[X = 0]$, $P[0 < X \leq 2]$ und $P[0 \leq X < \frac{1}{2}]$.

c) die Wahrscheinlichkeit $P[Y \leq t]$ für $Y := X^2$ und $t \in [0, 1]$.

3. (10 Punkte) Seien X und Y zwei unabhängigen Zufallsvariablen mit X exponentialverteilt mit Parameter 1 und Y uniform verteilt auf dem Intervall $[1, 2]$. Ferner definieren wir

$$Z_1 := \log(Y + 1), \quad Z_2 := \frac{X}{Y}, \quad Z_3 := X \cdot Y.$$

a) Berechnen Sie die Dichte von Z_1.

b) Finden Sie die beste lineare Prognose von Z_3 durch X.

c) Berechnen Sie $P[X + Z_1 \leq 2]$, sowie die Verteilungsfunktion von Z_2.