Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. *Lösung:*

a) Es gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= 0 \cdot P[X=0] + 1 \cdot P[X=1] + 2 \cdot P[X=2] \\ &= P[X=1] + 2P[X=2]. \end{aligned}$$

Es gibt insgesamt $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten, zwei verscheidene Zahlen aus $1, 2, 3, 4, 5$ zu wählen. Es gibt nur eine Möglichkeit, zwei gerade Zahlen zu wählen. Deshalb haben wir

$$P[X=2] = \frac{1}{10}.$$

Ferner gibt es $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten, eine gerade und eine ungerade Zahl zu wählen. Deshalb gilt

$$P[X=1] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Also ist

$$E[X] = \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

Für die Varianz gilt

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 0 \cdot P[X=0] + 1 \cdot P[X=1] + 2^2 \cdot P[X=2] \\ &= P[X=1] + 4P[X=2]. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten auf der rechte Seite kennen wir schon, also ist

$$E[X^2] = \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{1}{10} = 1,$$

und

$$Var[X] = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = 0.36.$$

b) Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit haben wir

$$\begin{aligned} P[\text{Beide gerade}|\text{Selbe Parität}] &= \frac{P[\{\text{Beide gerade}\} \cap \{\text{Selbe Parität}\}]}{P[\text{Selbe Parität}]} \\ &= \frac{P[\text{Beide gerade}]}{P[\text{Selbe Parität}]}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$P[\text{Selbe Parität}] = P[\text{Beide gerade}] + P[\text{Beide ungerade}].$$

{Beide gerade} ist das gleiche Ereignis wie $\{X = 2\}$ aus a), also ist

$$P[\text{Beide gerade}] = \frac{1}{10}.$$

Es gibt genau $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten, zwei ungerade Zahlen aus $1, 2, 3, 4, 5$ zu wählen. Deshalb ist

$$P[\text{Beide ungerade}] = \frac{3}{10}.$$

Also haben wir

$$P[\text{Beide gerade}|\text{Selbe Parität}] = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{10}} = \frac{1}{4}.$$

c) Wir verwenden folgende Notation

$$\begin{aligned} G &= \{\text{Gewählte Zahl gerade}\}, \\ K &= \{\text{Kopf bei dem Münzwurf}\}. \end{aligned}$$

Gesucht ist $P[K|G]$. Gemäss der Formel von Bayes haben wir

$$P[K|G] = \frac{P[G|K]P[K]}{P[G|K]P[K] + P[G|K^c]P[K^c]}.$$

Es gilt

$$P[K] = \frac{1}{2} \text{ und } P[K^c] = \frac{1}{2}.$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} P[K|G] &= \frac{P[G|K]\frac{1}{2}}{P[G|K]\frac{1}{2} + P[G|K^c]\frac{1}{2}} \\ &= \frac{P[G|K]}{P[G|K] + P[G|K^c]}. \end{aligned}$$

Ferner ist $P[G|K]$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine gerade Zahl wählen, wenn wir eine Zahl aus $1, 2, 3, 4, 5$ wählen. Also

$$P[G|K] = \frac{2}{5}.$$

Auf ähnliche Weise ist $P[G|K^c]$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine gerade Zahl wählen, wenn wir eine Zahl aus $1, 2, 3, 4, 5, 6$ wählen. Also

$$P[G|K^c] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Es ergibt sich

$$P[K|G] = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}} = \frac{4}{9}.$$

2. *Lösung:*

a) Für die Konstante K muss gelten:

$$1 = K \int_0^1 (y+1)dy = K \left[\frac{1}{2}y^2 + y\right]_0^1 = \frac{3}{2}K.$$

Das heisst: $K = \frac{2}{3}$.

b) Wir berechnen zerst die Verteilungsfunktion F_{X^2} von X^2:

$$\begin{aligned}
F_{X^2}(t) &= P\left[X^2 \leq t\right] \\
&= P\left[X \leq \sqrt{t}\right] \\
&= \begin{cases} 0, & \sqrt{t} \leq 1, \\ 2\int_1^{\sqrt{t}} \frac{1}{x^2}dx, & 1 \leq \sqrt{t} \leq 2, \\ 1, & \sqrt{t} \geq 2, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ 2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{t}}, & 1 \leq t \leq 4, \\ 1, & t \geq 4, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right), & 1 \leq t \leq 4, \\ 1, & t \geq 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Dichtefunktion f_{X^2} ist dann einfach die Ableitung im Inneren von $[1,4]$ und Null ausserhalb:

$$\begin{aligned}
f_{X^2}(x) &= \begin{cases} \frac{d}{dx}2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right), & 1 \leq t \leq 4, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \\
&= \begin{cases} t^{-\frac{3}{2}}, & 1 \leq t \leq 4, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}
\end{aligned}$$

c) Das erwartete Volumen ist gleich

$$\begin{aligned}
E[F] &= \frac{4}{3}\pi E\left[X^3\right] \\
&= \frac{4}{3}\pi \int_1^2 x^3 \frac{2}{x^2}dx \\
&= \frac{4}{3}\pi \int_1^2 2x dx \\
&= \frac{4}{3}\pi \left[x^2\right]_1^2 \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

3. *Lösung:*

a) Die Randdichte f_X von X ist gegeben durch $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f_{(X,Y)}(x,y)$. Für $x < 0$ und $x > 1$ gilt $f_X(x) = 0$, für $x \in [0,1]$ erhält man

$$f_X(x) = \frac{3}{2}\int_0^1 dy(x^2 + y^2) = \frac{3}{2}\left(x^2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Der Erwartungswert von X beträgt

$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (3x^3 + x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}.$$

b) Die Funktion $f(a) = E[(X - aY)^2]$ ist quadratisch in a, ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Also erhält man a aus der Bedingung $f'(a) = 0$, i.e.

$$a = \frac{E[XY]}{E[Y^2]}.$$

Bitte wenden!

Man berechnet nacheinander

$$E[XY] = \frac{3}{2}\int_0^1 dy \int_0^1 dx\; xy(x^2+y^2) = \frac{3}{2}\int_0^1 dy\Big(\frac{y}{4}+\frac{y^3}{2}\Big) = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\Big) = \frac{3}{8}$$

und

$$E[Y^2] = \frac{3}{2}\int_0^1 dy \int_0^1 dx\; y^2(x^2+y^2) = \frac{3}{2}\int_0^1 dy\Big(\frac{y^2}{3}+y^4\Big) = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\Big) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15},$$

also $a = 45/56$.

c) Wir bestimmen zuerst $P[2Y \le X]$. Man erhält

$$P[2Y \le X] = \frac{3}{2}\int_0^1 dx \int_0^{x/2} dy(x^2+y^2) = \frac{3}{2}\int_0^1 \Big(\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{24}\Big)dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{13}{96} = \frac{13}{64}.$$

$P[Y \le 2X]$ berechnet man entweder analog (der Integrationsbereich ist in diesem Falle ein Trapez) oder man bemerkt, dass wegen der Symmetrie $f_{(X,Y)}(x,y) = f_{(X,Y)}(y,x)$ (i.e., die Funktion $f_{(X,Y)}(x,y)$ ist symmetrisch bezüglich der Diagonalen $x = y$) gilt:

$$P[Y \le 2X] = 1 - P[Y \le X/2] = \frac{51}{64}.$$

Ohne Symmetrieargument:

$$\begin{aligned} P[Y \le 2X] &= \frac{3}{2}\int_0^{1/2} dx \int_0^{2x} dy(x^2+y^2) + \frac{3}{2}\int_{1/2}^1 dx \int_0^1 dy(x^2+y^2) \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{1/2}\Big(2x^3+\frac{8x^3}{3}\Big)dx + \frac{3}{2}\int_{1/2}^1 \Big(x^2+\frac{1}{3}\Big)dx \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{14}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} \;+\; \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big(1-\frac{1}{2^3}\Big) \;+\; \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6} \\ &= \frac{51}{64}. \end{aligned}$$