Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Es werden zufällig zwei *verschiedene* Zahlen zwischen 1 und 5 gewählt.

a) Sei X die Anzahl gewählter gerader Zahlen. Berechnen Sie $E[X]$ und $Var[X]$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide gewählte Zahlen gerade sind, bedingt darauf, dass beide gewählte Zahlen dieselbe Parität haben (zwei Zahlen haben dieselbe Parität, wenn entweder *beide* gerade sind, oder *beide* ungerade sind).

c) Wir betrachten jetzt ein anderes Verfahren. Eine faire Münze wird geworfen (fair heisst, dass Kopf und Zahl beide mit Wahrscheinlichkeit 1/2 erscheinen). Wenn bei dem Münzwurf Kopf erscheint, wird *eine* Zahl zufällig zwischen 1 und 5 gewählt. Wenn bei dem Münzwurf Zahl erscheint wird *eine* Zahl zufällig zwischen 1 und 6 gewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kopf erscheint, bedingt darauf, dass die zufällig gewählte Zahl gerade ist.

2. (10 Punkte) Gegeben sei eine Zufallsvariable Y mit der Dichtefunktion

$$f(y) = \begin{cases} K(y+1), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante K.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und Dichtefunktion von X^2, wobei X eine Zufallsvariable ist mit der Dichtefunktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, & 1 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Sei F das Volumen einer Kugel mit Radius X. Berechnen Sie den Erwartungswert von F. *Hinweis: Das Volumen einer Kugel mit Radius r ist $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

3. (10 Punkte) Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Randdichte und den Erwartungswert von X.

b) Bestimmen Sie die beste Prognose für X der Form $\hat{X} = aY$ derart, dass der Prognosefehler $E[(X-\hat{X})^2]$ minimiert wird.

c) Berechnen Sie $P[2Y \leq X]$ und $P[Y \leq 2X]$.