Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. Seien U_A das Ereignis, dass Urne A gewählt wird, und U_B das Ereignis, dass Urne B gewählt wird. Es gilt $P[U_A] = P[U_B] = 1/2$.

Sei (b, g) das Ereignis, dass die erste gezogene Kugel blau und die zweite gezogene Kugel grün ist. Die Ereignisse (g, b), (b, b) und (g, g) werden analog definiert.

a) Gesucht ist $P[U_A|\,(g,g)]$. Laut Aufgabenstellung gilt

$$P[(g,g)|\,U_A] \;=\; \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} \;=\; \frac{4}{25} \qquad \text{und} \qquad P[(g,g)|\,U_B] \;=\; \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} \;=\; \frac{4}{9}.$$

Nach der Formel von Bayes gilt

$$P[U_A|\,(g,g)] \;=\; \frac{P[(g,g)|\,U_A]P[U_A]}{P[(g,g)|\,U_A]P[U_A] + P[(g,g)|\,U_B]P[U_B]} \;=\; \frac{\frac{4}{25}}{\frac{4}{25}+\frac{4}{9}} \;=\; \frac{9}{34}.$$

b) Gesucht ist $P[U_A|\,(g,g)]$. Laut Aufgabenstellung gilt

$$P[(g,g)|\,U_A] \;=\; \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} \;=\; \frac{2}{20} \qquad \text{und} \qquad P[(g,g)|\,U_B] \;=\; \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} \;=\; \frac{2}{6}.$$

Nach der Formel von Bayes gilt

$$P[U_A|\,(g,g)] \;=\; \frac{P[(g,g)|\,U_A]P[U_A]}{P[(g,g)|\,U_A]P[U_A] + P[(g,g)|\,U_B]P[U_B]} \;=\; \frac{\frac{2}{20}}{\frac{2}{20}+\frac{2}{6}} \;=\; \frac{3}{13}.$$

c) Sei N_b die Anzahl aus Urne A gezogener blauer Kugeln. Es gilt

$$\begin{aligned} E[N_b] &= P[N_b = 1] + 2P[N_b = 2] \;=\; P[(b,g)\cup(g,b)] + 2P[(b,b)] \\ &= P[(b,g)] + P[(g,b)] + 2P[(b,b)]. \end{aligned}$$

Mit dem angegebenen Verfahren gilt

$$P[(b,g)|U_A] \;=\; \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}, \quad P[(g,b)|U_A] = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{10} \quad \text{und} \quad P[(b,b)|U_A] = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

Wir erhalten somit

$$E[N_b] \;=\; \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + 2\frac{3}{10} \;=\; \frac{12}{10} \;=\; \frac{6}{5}.$$

2. **a)** Es gilt (diese Formel muss hergeleitet werden)

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E\left[e^{itX}\right] \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P[X = k] \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{it}\lambda\right)^k}{k!} \;=\; e^{-\lambda}e^{e^{it}\lambda} \;=\; e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Analog gilt $\varphi_Y(t) = e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$. Wir haben

$$\begin{aligned} E\left[e^{itS}\right] &= E\left[e^{it(X+Y)}\right] = E\left[e^{itX}e^{itY}\right] \\ &\overset{\text{unabh.}}{=} E\left[e^{itX}\right]E\left[e^{itY}\right] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t). \end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir $\varphi_S(t) = e^{(\lambda+\mu)\left(e^{it}-1\right)}$. Also hat S eine Poissonverteilung mit Parameter $\lambda + \mu$.

b) Es gilt, da Z unabhängig von X und Y ist, und $X+Y$ nach **a)** eine Poisson$(\lambda+\mu)$ Verteilung hat,

$$\begin{aligned} P[T = n] &= P[X + ZY = n] = pP[X + Y = n] + (1-p)P[X = n] \\ &= pe^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} + (1-p)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}. \end{aligned}$$

Aus Unabhängigkeit und der Linearität des Erwartungswertes folgt

$$E[T] = E[X] + E[ZY] = \lambda + E[Z][Y] = \lambda + p\mu.$$

Alternative:

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{n=0}^{\infty} nP[X + ZY = n] = p\sum_{n=0}^{\infty} nP[X+Y=n] + (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} nP[X=n] \\ &= pE[X+Y] + (1-p)E[X] = p\lambda + p\mu + \lambda - p\lambda = p\mu + \lambda. \end{aligned}$$

c) Aus der Unabhängigkeit von X und ZY folgt

$$P[T = n|X = k] = P[X + ZY = n|X = k] = P[ZY = n-k].$$

Da Y und Z unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned} P[T = n|X = k] &= pP[Y = n-k] + (1-p)P[0 = n-k] \\ &= pe^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} + (1-p)1_{\{n=k\}}. \end{aligned}$$

3. **a)** Es muss gelten

$$\begin{aligned} 1 &= \int\int f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= c\int\int 1_{\{\frac{1}{2}\le|x|\le 1,\ -1\le y\le 1\}}dxdy + c\int\int 1_{\{-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\le|y|\le 1\}}dxdy \\ &= 2c + c = 3c. \end{aligned}$$

Somit gilt $c = 1/3$. Für die Dichte von X gilt

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} 1_{\{\frac{1}{2}\le|x|\le 1\}}dy + \frac{1}{3}\int_{-1}^{-1/2} 1_{\{-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\}}dy + \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1} 1_{\{-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\}}dy \\ &= \frac{2}{3}1_{\{\frac{1}{2}\le|x|\le 1\}} + \frac{1}{3}1_{\{-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\}}. \end{aligned}$$

Aus Symmetrie gilt $f_Y(y) = f_X(y) = \frac{2}{3}1_{\{\frac{1}{2}\le|y|\le 1\}} + \frac{1}{3}1_{\{-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\}}$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Wir haben

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int x^2 f_X(x)dx \\
&= \frac{2}{3}\int x^2 1_{\{\frac{1}{2}\le|x|\le 1\}}dx + \frac{1}{3}\int x^2 1_{\{-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\}}dx \\
&= \frac{4}{3}\int_{1/2}^{1} x^2dx + \frac{2}{3}\int_0^{1/2} x^2dx \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{1-1/8}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1/8}{3}\right) \\
&= \frac{28}{72} + \frac{2}{72} \;=\; \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Es gilt $\varrho^2 = (X-2)^2+Y^2 = X^2-4X+4+Y^2$. Somit ist, aus Symmetrie gilt $E[X^2]=E[Y^2]$,

$$E[\varrho^2] \;=\; E[X^2]+E[Y^2]+4 \;=\; 2E[X^2]+4 \;=\; \frac{5}{6}+4 \;=\; \frac{29}{6},$$

da nach dem Hinweis gilt $E[X]=0$.

Die beste lineare Prognose von ϱ^2 durch X ist gegeben durch

$$Z \;=\; \frac{\operatorname{cov}(\varrho^2,X)}{\operatorname{Var}(X)}(X-E[X])+E[\varrho^2] \;=\; \frac{E[\varrho^2X]}{E[X^2]}X+E[\varrho^2].$$

Es gilt $X\varrho^2 = X^3-4X^2+4X+XY^2$. Nach dem Hinweis gilt $E[X]=E[X^3]=E[XY^2]=0$. Daher ist $E[\varrho^2X]=-4E[X^2]$. Somit haben wir

$$Z \;=\; \frac{E[\varrho^2X]}{E[X^2]}X+E[\varrho^2] \;=\; -4X+\frac{29}{6}.$$

c) Die Seitenlänge des Quadrates ist $S=2\max\{|X|,|Y|\}$. Die Fläche des Quadrates ist daher mindestens 1 und maximal 4. Somit ist $f_V(v)=0$ für $v\le 1$ und $v\ge 4$. Sei $v\in[1,4]$. Es ist $V\le v$ genau dann, wenn $S\le\sqrt{v}$ gilt. Es gilt daher, da $\sqrt{v}/2\in[1/2,1]$,

$$\begin{aligned}
P[V\le v] &= P[\max\{|X|,|Y|\}\le\sqrt{v}/2] \\
&= P[|X|\le\sqrt{v}/2,\,|Y|\le\sqrt{v}/2] \\
&= \frac{1}{3}\int_{|y|\le 1}\int_{1/2\le|x|\le 1} 1_{\{|x|\le\sqrt{v}/2,\,|y|\le\sqrt{v}/2\}}dxdy \\
&\qquad + \frac{1}{3}\int_{|x|\le 1/2}\int_{1/2\le|y|\le 1} 1_{\{|x|\le\sqrt{v}/2,\,|y|\le\sqrt{v}/2\}}dydx \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{v}\left(\sqrt{v}-1\right)+\frac{1}{3}\left(\sqrt{v}-1\right) \;=\; \frac{1}{3}\left(v-1\right).
\end{aligned}$$

Somit ist $f_V(v)=1/3$ für $v\in[1,4]$.

Für $E[V]$ gilt daher

$$E[V] \;=\; \frac{1}{3}\int_1^4 vdv \;=\; \frac{1}{3}\left.\frac{v^2}{2}\right|_1^4 \;=\; \frac{5}{2}.$$