Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. Seien U_A das Ereignis, dass Urne A gewählt wird, und U_B das Ereignis, dass Urne B gewählt wird. Es gilt $P[U_A] = P[U_B] = 1/2$.

a) Gesucht ist $P[U_A|\, X = 1]$. Laut Aufgabenstellung gilt

$$\begin{aligned} P[X = k|\, U_A] &= \binom{3}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{3-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3; \\ P[X = l|\, U_B] &= \binom{3}{l}\left(\frac{1}{5}\right)^l\left(\frac{4}{5}\right)^{3-l} \qquad l = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Nach der Formel von Bayes gilt

$$\begin{aligned} P[U_A|\, X = 1] &= \frac{P[X = 1|\, U_A]P[U_A]}{P[X = 1|\, U_A]P[U_A] + P[X = 1|\, U_B]P[U_B]} \\ &= \frac{3\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2}{3\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2\cdot 9}{2\cdot 9 + 16} = \frac{18}{34} = \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

b) Wir suchen die Wahrscheinlichkeit vom Ereignis $E = \{X = 0 \text{ oder } X = 3\} = \{X = 0\} \cup \{X = 3\}$. Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} P[E] &= P[X = 0] + P[X = 3] \\ &= P[X = 0|U_A]P[U_A] + P[X = 3|U_A]P[U_A] \\ &\qquad + P[X = 0|U_B]P[U_B] + P[X = 3|U_B]P[U_B] \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{27 + 8 + 64 + 1}{125} = \frac{1}{2}\cdot\frac{100}{125} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{3} kP[X = k] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} k(P[X = k|U_A] + P[X = k|U_B]) = \frac{1}{2}\left(3\frac{2}{5} + 3\frac{1}{5}\right) = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Wegen $3 = X + Y$ gilt

$$E[Y] = E[3 - X] = 3 - E[X] = \frac{21}{10}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
E[XY] &= E\left[3X - X^2\right] = 3E[X] - E\left[X^2\right] \\
&= \frac{27}{10} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} k^2 (P[X=k|U_A] + P[X=k|U_B]) \\
&= \frac{27}{10} - \frac{3}{2} = \frac{12}{10}.
\end{aligned}$$

2. a) Es ist $S = X + 3Y + 2Z$. Aus der Unabhängigkeit folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(3Y) + \mathrm{Var}(2Z) \\
&= \mathrm{Var}(X) + 9\mathrm{Var}(Y) + 4\mathrm{Var}(Z) = 22\lambda.
\end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\varphi_D(t) &= E\left[e^{itD}\right] = E\left[e^{it(X-Y)}\right] = E\left[e^{itX}e^{-itY}\right] \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} E\left[e^{itX}\right]E\left[e^{-itY}\right] = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t).
\end{aligned}$$

Es gilt (diese Formel muss hergeleitet werden)

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E\left[e^{itX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P[X=k] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{it}\lambda\right)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.
\end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir

$$\varphi_D(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}e^{\lambda\left(e^{-it}-1\right)} = e^{\lambda\left(e^{it}+e^{-it}-2\right)} = e^{2\lambda(\cos(t)-1)}.$$

b) Aus der Unabhängigkeit von X und $Y + Z$ folgt

$$\begin{aligned}
P[X=k|T=n] &= \frac{P[T=n|X=k]P[X=k]}{P[T=n]} \\
&= \frac{P[Y+Z=n-k]P[X=k]}{P[T=n]}.
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Poisson-verteilten Zufallsvariablen folgt, dass $Y + Z$ eine Poisson(4λ) und T eine Poisson(5λ) Verteilung haben. Also

$$\begin{aligned}
P[X=k|T=n] &= \frac{e^{-4\lambda}(4\lambda)^{n-k}e^{-\lambda}\lambda^k n!}{(n-k)!k!e^{-5\lambda}(5\lambda)^n} \\
&= \binom{n}{k}\frac{4^{n-k}}{5^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\mathrm{Var}(T) = E[T] = 5\lambda.$$

Mit der Ungleichung von Chebyshev folgt

$$\begin{aligned}
P[T<\lambda] &= P[T-5\lambda < -4\lambda] \\
&\le P[|T-5\lambda| \ge 4\lambda] \le \frac{\mathrm{Var}(T)}{16\lambda^2} = \frac{5}{16\lambda}.
\end{aligned}$$

Mit $\lambda \ge 1$ folgt

$$P[T<\lambda] \le \frac{5}{16\lambda} \le \frac{5}{16} < \frac{1}{3}.$$

Also kann $P[T < \lambda] > 1/3$ nicht gelten.

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Wir haben

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{V}{X^2+1}\right] &= E\left[Y\frac{X}{X^2+1}\right] = E\left[Y\right]E\left[\frac{X}{X^2+1}\right] \\
&= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{\log(2)}{2}.
\end{aligned}
$$

b) Wegen der Unabhängigkeit gilt für die gemeinsame Dichte von (X, Y)

$$f_{X,Y}(x,y) = 1_{\{0\leq x\leq 1\}}e^{-y}1_{\{y>0\}}.$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
P[U\leq 0.5] &= \int\int f_{X,Y}(x,y)1_{\{x+y\leq 0.5\}}dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^\infty e^{-y}1_{\{y\leq 0.5-x\}}1_{\{y>0\}}dydx \\
&= \int_0^1 1_{\{x\leq 0.5\}}\left(1-e^{-(0.5-x)}\right)dx \\
&= \int_0^{0.5}\left(1-e^{x-0.5}\right)dx = 0.5-e^{-0.5}\left(e^{0.5}-1\right) = e^{-0.5}-0.5.
\end{aligned}
$$

Es gilt $P[U<u]=0$ für $u<0$. Für $u\geq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
P[U\leq u] &= \int\int f_{X,Y}(x,y)1_{\{x+y\leq u\}}dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^\infty e^{-y}1_{\{y\leq u-x\}}1_{\{y>0\}}dydx \\
&= \int_0^1 1_{\{u-x\geq 0\}}\left(1-e^{-(u-x)}\right)dx \\
&= \int_0^1 1_{\{x\leq u\}}\left(1-e^{x}e^{-u}\right)dx.
\end{aligned}
$$

Für $u>1$ gilt

$$P[U\leq u] = \int_0^1 1-e^xe^{-u}dx = 1-e^{-u}(e-1).$$

Für $0\leq u\leq 1$ gilt

$$P[U\leq u] = \int_0^u 1-e^xe^{-u}dx = u-e^{-u}\left(e^u-1\right).$$

Also haben wir

$$P[U\leq u] = \begin{cases} 0, & \text{falls } u<0,\\ u+e^{-u}-1, & \text{falls } 0\leq u<1,\\ 1-e^{-u}(e-1), & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für die Dichte f_U gilt dann

$$f_U(u) = \frac{d}{du}P[U\leq u] = \begin{cases} 0, & \text{falls } u<0,\\ 1-e^{-u}, & \text{falls } 0\leq u<1,\\ e^{-u}(e-1), & \text{sonst.}\end{cases}$$

c) Die beste lineare Prognose von V durch U ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{\text{cov}(V,U)}{\text{Var}(U)}(U-E[U])+E[V] \\
&= \frac{\text{cov}(V,U)}{\text{Var}(X+Y)}(U-E[X+Y])+E[XY] \\
&= \frac{\text{cov}(V,U)}{\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)}(U-E[X]-E[Y])+E[X]E[Y].
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

Es gilt $E[X] = 1/2$, $\mathrm{Var}(X) = 1/12$ und $E[Y] = \mathrm{Var}(Y) = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(V,U) &= E[VU] - E[V]E[U] \\
&= E\left[X^2Y + XY^2\right] - E[XY]E[X+Y] \\
&= E\left[X^2Y\right] + E\left[XY^2\right] - E[XY]E[X] - E[XY]E[Y] \\
&= E\left[X^2\right]E[Y] + E[X]E\left[Y^2\right] - E[Y]E[X]^2 - E[X]E[Y]^2 \\
&= E[Y]\,\mathrm{Var}(X) + E[X]\,\mathrm{Var}(Y).
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{E[Y]\,\mathrm{Var}(X) + E[X]\,\mathrm{Var}(Y)}{\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)}(U - E[X] - E[Y]) + E[X]E[Y] \\
&= \frac{1/12 + 1/2}{1/12 + 1}\left(U - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{13}\left(U - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{7}{13}U - \frac{4}{13}.
\end{aligned}$$