Prof. Dr. A.-S. Sznitman ETH Zürich Sommer 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Wir betrachten zwei Urnen A und B. Die Urne A enthält 2 blaue und 3 rote Kugeln. Die Urne B enthält 1 blaue Kugel und 4 rote Kugeln. Man wählt zufällig eine Urne und zieht dann aus der gewählten Urne 3 Kugeln nacheinander zufällig *mit* zurücklegen. Es bezeichnen X die Anzahl gezogener blauer Kugeln und Y die Anzahl gezogener roter Kugeln.

a) Falls genau eine der gezogenen Kugeln blau ist, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Urne A gewählt wurde?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei gezogenen Kugeln die selbe Farbe haben.

c) Berechnen Sie $E[X]$, $E[Y]$ und $E[XY]$.

2. (10 Punkte) Sei $\lambda > 0$ und seien X, Y und Z unabhängige Zufallsvariablen mit einer respektiv Poisson(λ), Poisson(λ) und Poisson(3λ) Verteilung. Seien $T = X + Y + Z$, $D = X - Y$ und $S = 2T - D$.

Hinweis: Für eine Zufallsvariable W mit einer Poisson(μ) Verteilung, $\mu > 0$, gilt $E[W] = \mu$ und $E[W^2] = \mu(\mu+1)$. Die charakteristische Funktion von W darf *nicht* als bekannt angenommen werden.

a) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(S)$.
Berechnen Sie die charakteristische Funktion $\varphi_D(t) = E\left[e^{itD}\right]$, $t \in \mathbb{R}$, von D.

b) Seien $n \geq 0$ und $0 \leq k \leq n$. Berechnen Sie $P[X = k \mid T = n]$.

c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(T)$.
Falls $\lambda \geq 1$, gilt dann $P[T < \lambda] > 1/3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. (10 Punkte) Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit respektiver Uniformverteilung auf $[0,1]$ und Exponentialverteilung mit Parameter 1. Seien $U = X + Y$ und $V = XY$.

a) Berechnen Sie $E\left[\frac{V}{X^2+1}\right]$.

b) Berechnen Sie $P[U \leq 1/2]$.
Bestimmen Sie zudem die Verteilungsfunktion sowie die Dichtefunktion von U.

c) Berechnen Sie die beste lineare Prognose von V durch U.