Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. **a)** Es gilt $X, Y, Z \in \{0, 1, 2\}$ mit $X + Y + Z = 2$. Wir definieren die beiden Ereignisse

$$\begin{aligned} U_A &= \text{Urne } A \text{ wurde gewählt,} \\ U_B &= \text{Urne } B \text{ wurde gewählt.} \end{aligned}$$

Wir haben $P[U_A] = P[U_B] = \frac{1}{2}$. Ausserdem gilt

$$P[X = 2 \,|\, U_A] = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

sowie

$$P[X = 2 \,|\, U_B] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist $P[U_A \,|\, X = 2]$. Mit der Formel von Bayes bekommen wir

$$\begin{aligned} P[U_A \,|\, X = 2] &= \frac{P[X = 2 \,|\, U_A]\, P[U_A]}{P[X = 2 \,|\, U_A]\, P[U_A] + P[X = 2 \,|\, U_B]\, P[U_B]} \\ &= \frac{P[X = 2 \,|\, U_A]}{P[X = 2 \,|\, U_A] + P[X = 2 \,|\, U_B]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

b) Da $X + Y \leq 2$, haben wir $M = \min\{X, Y\} \in \{0, 1\}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} P[M = 1] &= P[\min\{X, Y\} = 1] = P[X = 1, Y = 1] \\ &= P[X = 1, Y = 1 \,|\, U_A]\, P[U_A] + P[X = 1, Y = 1 \,|\, U_B]\, P[U_B] \\ &= \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $P[M = 0] = 1 - P[M = 1] = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$ und

$$F_M(m) = \begin{cases} 0, & m < 0, \\ \frac{13}{16}, & 0 \leq m < 1, \\ 1, & 1 \leq m. \end{cases}$$

Bitte wenden!

c) Wir definieren die drei Ereignisse

$$\begin{aligned} D_0 &= \text{Von den 2 von Urne } A \text{ nach Urne } B \text{ transportierten Kugeln ist keine blau.}\\ D_1 &= \text{Von den 2 von Urne } A \text{ nach Urne } B \text{ transportierten Kugeln ist eine blau.}\\ D_2 &= \text{Von den 2 von Urne } A \text{ nach Urne } B \text{ transportierten Kugeln sind beide blau.} \end{aligned}$$

Wir haben

$$P[D_0] = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P[D_1] = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{6},$$

und

$$P[D_2] = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Ausserdem gilt

$$P[X=2\,|\,D_0] = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$P[X=2\,|\,D_1] = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{4}{36},$$

sowie

$$P[X=2\,|\,D_2] = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{9}{36}.$$

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist $P[D_2\,|\,X=2]$. Mit der Formel von Bayes bekommen wir

$$\begin{aligned} P[D_2\,|\,X=2] &= \frac{P[X=2\,|\,D_2]\,P[D_2]}{P[X=2\,|\,D_0]\,P[D_0]+P[X=2\,|\,D_1]\,P[D_1]+P[X=2\,|\,D_2]\,P[D_2]}\\ &= \frac{\frac{9}{36}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{36}\cdot\frac{4}{6}+\frac{9}{36}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{9}{26}. \end{aligned}$$

2. a) Es muss gelten, dass

$$\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1.$$

Aus der ersten Bedingung bekommen wir

$$0 \stackrel{!}{=} \lim_{t\to-\infty} F_X(t) = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{4}e^{t+2}+c\right) = c.$$

Wir finden also $c=0$.

Andererseits haben wir

$$1 \stackrel{!}{=} \lim_{t\to\infty} F_X(t) = \lim_{t\to\infty}\big((\lambda-1)e^t+1\big).$$

Diese Bedingung ist erfüllt genau dann wenn $\lambda=1$.

Siehe nächstes Blatt!

Zu guter Letzt berechnen wir

$$P[0 \leq X < 5] \;=\; P[X < 5] - P[X < 0] \;=\; \lim_{t \nearrow 5} F_X(t) - \lim_{t \nearrow 0} F_X(t)$$
$$= \lim_{t \nearrow 5} \frac{2+t}{3+t} - \lim_{t \nearrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8} \right) \;=\; \frac{7}{8} - \frac{1}{2} \;=\; \frac{3}{8}.$$

b) Da $E[Y] = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ und $E[Z] = 0$, haben wir

$$E[2Y - 3(Z+1)] \;=\; 2E[Y] - 3E[Z] - 3 \;=\; 3 - 0 - 3 \;=\; 0.$$

Die Dichte f_Y von Y ist gegeben durch $f_Y(y) = 1_{\{1 \leq y \leq 2\}}$. Damit berechnen wir

$$E\left[\frac{1}{Y+1}\right] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y+1} f_Y(y)\, dy \;=\; \int_1^2 \frac{1}{y+1} dy \;=\; [\log(y+1)]_1^2 \;=\; \log\left(\frac{3}{2}\right).$$

Da Y und Z unabhängig sind, bekommen wir

$$\operatorname{Cov}\left(Z^2, Y\right) \;=\; E\left[Z^2 Y\right] - E\left[Z^2\right] E\left[Y\right] \;=\; E\left[Z^2\right] E\left[Y\right] - E\left[Z^2\right] E\left[Y\right] \;=\; 0.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Cov}\left(Z^2 + Y, Y\right) \;=\; \operatorname{Cov}\left(Z^2, Y\right) + \operatorname{Cov}\left(Y, Y\right) \;=\; \operatorname{Var}(Y) \;=\; \frac{(3-2)^2}{12} \;=\; \frac{1}{12}.$$

c) Da $Y \in [1,2]$, haben wir $1/Y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ und somit $U \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Daraus folgt $F_U(u) = 0$ für $u < \frac{1}{2}$ und $F_U(u) = 1$ für $u \geq 2$. Für alle $\frac{1}{2} \leq u < 2$ gilt

$$\begin{aligned} F_U(u) \;&=\; P[U \leq u] \;=\; P[U \leq u \,|\, Z \leq 0] P[Z \leq 0] + P[U \leq u \,|\, Z > 0] P[Z > 0] \\ &=\; P[1/Y \leq u] \cdot \frac{1}{2} + P[Y \leq u] \cdot \frac{1}{2} \;=\; P\left[Y \geq \frac{1}{u}\right] \cdot \frac{1}{2} + P[Y \leq u] \cdot \frac{1}{2} \\ &=\; \frac{1}{2} \left(1 - P\left[Y \leq \frac{1}{u}\right] + P[Y \leq u] \right). \end{aligned}$$

Sei nun $\frac{1}{2} \leq u < 1$. Dann haben wir

$$F_U(u) \;=\; \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{u} - 1 \right) + 0 \right) \;=\; 1 - \frac{1}{2u}.$$

Falls $1 \leq u < 2$, bekommen wir

$$F_U(u) \;=\; \frac{1}{2} \left(1 - 0 + (u-1)\right) \;=\; \frac{u}{2}.$$

Zusammenfassend haben wir

$$F_U(u) \;=\; \begin{cases} 0, & u < \frac{1}{2}, \\ 1 - \frac{1}{2u}, & \frac{1}{2} \leq u < 1, \\ \frac{u}{2}, & 1 \leq u < 2, \\ 1, & 2 \leq u. \end{cases}$$

Bitte wenden!

3. **a)** Da $X \in [0,1]$, haben wir für die Dichte f_X von X, dass $f_X(x) = 0$ für $x < 0$ und $x > 1$. Für $0 \leq x \leq 1$ bekommen wir

$$f_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \;=\; \int_0^1 (x+y)\,dy \;=\; x + \frac{1}{2}.$$

Zusammenfassend haben wir

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x. \end{cases}$$

Sei f_Y die Dichte von Y. Wegen Symmetrie der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$ von (X,Y) folgt, dass $f_Y = f_X$. Da aber allgemein

$$f_{X,Y}(x,y) \;\neq\; f_X(x)\cdot f_X(y) \;=\; f_X(x)\cdot f_Y(y),$$

sind X und Y nicht unabhängig.

b) Gesucht wird dasjenige a, für das

$$g(a) \;:=\; E\left[\left(X^2 - aY\right)^2\right] \;=\; E\left[X^4\right] - 2aE\left[X^2Y\right] + a^2E\left[Y^2\right]$$

minimal wird. Wegen

$$g'(a) \;=\; -2E\left[X^2Y\right] + 2aE\left[Y^2\right] \qquad \text{und} \qquad g''(a) \;=\; 2E\left[Y^2\right] \;>\; 0,$$

ist dies für

$$a \;=\; \frac{E\left[X^2Y\right]}{E\left[Y^2\right]}$$

erfüllt. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} E\left[X^2Y\right] \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2y f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \;=\; \int_0^1\int_0^1 x^2y(x+y)\,dxdy \\ &=\; \int_0^1 \left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{3}y^2\right)dy \;=\; \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \;=\; \frac{17}{72} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E\left[Y^2\right] \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \;=\; \int_0^1\int_0^1 y^2(x+y)\,dxdy \\ &=\; \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + y^3\right)dy \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \;=\; \frac{5}{12} \end{aligned}$$

und erhalten somit

$$a \;=\; \frac{\frac{17}{72}}{\frac{5}{12}} \;=\; \frac{17}{30}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir berechnen

$$E\left[\frac{XY}{X+Y}\right] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xy}{x+y} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \;=\; \int_0^1\int_0^1 xy\,dxdy \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{4}.$$

Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und da

$$\{X < Y\} \subset \{X < 3Y\},$$

erhalten wir

$$P[X < Y \,|\, X < 3Y] \;=\; \frac{P[X < Y, X < 3Y]}{P[X < 3Y]} \;=\; \frac{P[X < Y]}{P[X < 3Y]}.$$

Wegen der Symmetrie der gemeinsamen Dichte von (X, Y) haben wir

$$P[X < Y] = \frac{1}{2}.$$

Für den Nenner berechnen wir

$$\begin{aligned}
P[X < 3Y] \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{x<3y\}} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \;=\; \int_0^1\int_0^{\min\{1,3y\}} (x+y)\,dxdy \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}}\int_0^{3y} (x+y)\,dxdy + \int_{\frac{1}{3}}^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{2}y^2 + 3y^2\,dy + \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(\frac{1}{2}+y\right)\,dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{15}{2}y^2\,dy + \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(\frac{1}{2}+y\right)\,dy \\
&= \frac{15}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \\
&= \frac{5}{54} + \frac{1}{3} + \frac{8}{18} \\
&= \frac{47}{54}.
\end{aligned}$$

Am Ende erhalten wir

$$P[X < Y \,|\, X < 3Y] \;=\; \frac{\frac{1}{2}}{\frac{47}{54}} \;=\; \frac{27}{47}.$$

Alternative Berechnung für den Nenner:

$$\begin{aligned}
P[X < 3Y] \;&=\; 1 - P[X \geq 3Y] \;=\; 1 - P\left[Y \leq \frac{X}{3}\right] \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{y\leq\frac{x}{3}\}} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \;=\; 1 - \int_0^1\int_0^{\frac{x}{3}} (x+y)\,dydx \\
&= 1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{9}\,dx \;=\; 1 - \frac{7}{18}\int_0^1 x^2\,dx \;=\; 1 - \frac{7}{54} \;=\; \frac{47}{54}.
\end{aligned}$$