Prof. Dr. A.-S. Sznitman ETH Zürich Sommer 2018

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

Bitte ausfüllen!

Name	
Vorname	
Legi-Nr.	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		

Punktesumme	
Kontrolle	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

- **Bitte** ...
  - Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
  - Tragen Sie Ihre Daten in das Deckblatt ein.
  - Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
  - Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
  - Verwenden Sie keinen Tipp-Ex oder Ähnliches.
  - Verwenden Sie **keinen roten oder grünen Stift** und auch **keinen Bleistift**.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 5 beidseitig von Hand beschriebene A4-Blätter, kein Taschenrechner.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) In einer Urne A befinden sich zwei blaue, eine rote und eine schwarze Kugel. In einer Urne B haben wir eine blaue, eine rote und zwei schwarze Kugeln. Man wählt zufällig (mit Wahrscheinlichkeit je $\frac{1}{2}$) eine der beiden Urnen aus. Aus der ausgewählten Urne wird zufällig eine Kugel gezogen und wieder in die Urne zurückgelegt. Danach wird aus derselben Urne nochmals zufällig eine Kugel gezogen. Es bezeichne X die Anzahl gezogener blauer Kugeln, Y die Anzahl gezogener roter Kugeln und Z die Anzahl gezogener schwarzer Kugeln.

a) Falls die zwei gezogenen Kugeln blau sind, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Urne A gewählt wurde?

b) Sei $M = \min\{X, Y\}$ das Minimum von X und Y. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_M von M.

c) Wir wählen zufällig zwei Kugeln aus Urne A und legen sie in Urne B. Aus Urne B wird dann zufällig eine Kugel gezogen und wieder in Urne B zurückgelegt. Danach wird aus Urne B nochmals zufällig eine Kugel gezogen. Falls die beiden gezogenen Kugeln blau sind, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden von Urne A nach Urne B transportierten Kugeln ebenfalls blau waren?

2. (10 Punkte) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{t+2} + c, & t < -2, \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{8}, & -2 \leq t < 0, \\ \frac{2+t}{3+t}, & 0 \leq t < 5, \\ (\lambda - 1)e^t + 1, & 5 \leq t. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstanten c und λ sowie $P[0 \leq X < 5]$.

Seien Y und Z unabhängige Zufallsvariablen, wobei Y gleichmässig verteilt auf $[1, 2]$ und Z standardnormalverteilt ist.

b) Berechnen Sie $E[2Y - 3(Z + 1)]$, $E\left[\frac{1}{Y+1}\right]$ sowie $\mathrm{Cov}(Z^2 + Y, Y)$.

c) Sei

$$U = \begin{cases} Y, & \text{falls } Z > 0, \\ 1/Y, & \text{falls } Z \leq 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_U von U.

Bitte wenden!

3. (10 Punkte) Seien X und Y Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Randdichte f_X von X. Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $E[(X^2 - aY)^2]$ minimal wird.

c) Berechnen Sie $E\left[\frac{XY}{X+Y}\right]$ und $P[X < Y \mid X < 3Y]$.