Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. a) (3 Punkte) Wir haben

$$X \sim \text{Binomial}\left(n_X = 1, p_X = \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad Y \sim \text{Binomial}\left(n_Y = 2, p_Y = \frac{1}{2}\right).$$

Daraus folgt

$$E[X] = n_X \cdot p_X = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \text{Var}(X) = n_X \cdot p_X \cdot (1 - p_X) = \frac{1}{4},$$

sowie

$$E[Y] = n_Y \cdot p_Y = 1 \qquad \text{und} \qquad \text{Var}(Y) = n_Y \cdot p_Y \cdot (1 - p_Y) = \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen nun

$$E[2S - 3] = 2E[S] - 3 = 2E[X + Y] - 3 = 2E[X] + 2E[Y] - 3 = 0$$

und, indem wir die Unabhängigkeit von X und Y verwenden,

$$\text{Var}(2S + 1) = 4\text{Var}(S) = 4\text{Var}(X + Y) = 4\text{Var}(X) + 4\text{Var}(Y) = 3.$$

b) (3 Punkte) Wir berechnen

$$\begin{aligned} P[X = 0 \mid S = 2] &= \frac{P[X = 0, S = 2]}{P[S = 2]} = \frac{P[X = 0, Y = 2]}{P[X = 1, Y = 1] + P[X = 0, Y = 2]} \\ &= \frac{P[X = 0]P[Y = 2]}{P[X = 1]P[Y = 1] + P[X = 0]P[Y = 2]} \\ &= \frac{P[Y = 2]}{P[Y = 1] + P[Y = 2]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Gleichung verwendet haben, dass X und Y unabhängig sind, und in der vierten Gleichung, dass $P[X = 0] = P[X = 1]$.

Ausserdem haben wir

$$P[U = 0 \mid S = 2] = \frac{P[U = 0, S = 2]}{P[S = 2]} = \frac{P[X = 0, Y = 2]}{P[X = 1, Y = 1] + P[X = 0, Y = 2]} = \frac{1}{3}.$$

Bitte wenden!

c) (4 Punkte) Wir haben $X \in \{0,1\}$ und $Y \in \{0,1,2\}$. Daraus folgt $U \in \{0,1,2\}$. Mit Hilfe der Unabhängigkeit von X und Y berechnen wir

$$P[U=1] \;=\; P[X=1, Y=1] \;=\; P[X=1]P[Y=1] \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{4}$$

und

$$P[U=2] \;=\; P[X=1, Y=2] \;=\; P[X=1]P[Y=2] \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{8}.$$

Es folgt

$$P[U=0] \;=\; 1 - P[U=1] - P[U=2] \;=\; 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \;=\; \frac{5}{8}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{U+1}\right] &= \frac{1}{0+1}\cdot P[U=0] + \frac{1}{1+1}\cdot P[U=1] + \frac{1}{2+1}\cdot P[U=2] \\ &= 1\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} \;=\; \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

2. a) (3 Punkte) Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} F_X(x) \;=\; 1.$$

Aus der ersten Bedingung bekommen wir

$$0 \overset{!}{=} \lim_{x\to-\infty} F_X(x) \;=\; \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}e^x + c_0\right) \;=\; c_0,$$

und aus der zweiten

$$1 \overset{!}{=} \lim_{x\to\infty} F_X(x) \;=\; \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4} + c_1(1-e^{-x})\right) \;=\; \frac{3}{4} + c_1.$$

Wir bekommen also $c_0 = 0$ und $c_1 = \frac{1}{4}$.

Zu guter Letzt haben wir

$$P\left[1 \le X < 2\right] \;=\; \lim_{x\nearrow 2} F_X(x) - \lim_{x\nearrow 1} F_X(x) \;=\; \frac{1}{2} - \lim_{x\nearrow 1}\left(\frac{3}{8} + \frac{x}{16}\right) \;=\; \frac{1}{16}.$$

b) (3 Punkte) Die Fläche A des Kreises mit Radius R ist gegeben durch $A = \pi R^2$. Da $R \in [1,2]$ mit Wahrscheinlichkeit 1, ist $A \in [\pi, 4\pi]$ mit Wahrscheinlichkeit 1. Damit folgt bereits $P[A > 4\pi] = 0$. Es folgt ebenfalls, dass $F_A(a) = 0$, für $a < \pi$, und $F_A(a) = 1$, für $a > 4\pi$. Sei nun $a \in [\pi, 4\pi]$. Dann haben wir

$$F_A(a) \;=\; P\left[A \le a\right] \;=\; P\left[\pi R^2 \le a\right] \;=\; P\left[-\sqrt{\frac{a}{\pi}} \le R \le \sqrt{\frac{a}{\pi}}\right] \;=\; \sqrt{\frac{a}{\pi}} - 1.$$

Siehe nächstes Blatt!

Zusammenfassend haben wir

$$F_A(a) \;=\; \begin{cases} 0, & a < \pi, \\ \sqrt{\frac{a}{\pi}} - 1, & \pi \le a \le 4\pi, \\ 1, & a > 4\pi. \end{cases}$$

Für die Dichte f_A gilt dann

$$f_A(a) \;=\; \frac{d}{da} F_A(a) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a\pi}}, & \pi \le a \le 4\pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) **(4 Punkte)** Wir berechnen

$$\begin{aligned} P\left[U \le \frac{5}{2}\right] &= P\left[U \le \frac{5}{2}, R \le \frac{3}{2}\right] + P\left[U \le \frac{5}{2}, R > \frac{3}{2}\right] \\ &= P\left[2R \le \frac{5}{2}, R \le \frac{3}{2}\right] + P\left[\frac{4}{R} \le \frac{5}{2}, R > \frac{3}{2}\right] \\ &= P\left[R \le \frac{5}{4}, R \le \frac{3}{2}\right] + P\left[R \ge \frac{8}{5}, R > \frac{3}{2}\right] \\ &= P\left[R \le \frac{5}{4}\right] + P\left[R \ge \frac{8}{5}\right] \;=\; P\left[R \le \frac{5}{4}\right] + 1 - P\left[R \le \frac{8}{5}\right] \\ &= \left(\frac{5}{4} - 1\right) + \left(1 - \left(\frac{8}{5} - 1\right)\right) \;=\; \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \;=\; \frac{13}{20}. \end{aligned}$$

3. **a)** **(3 Punkte)** Die Likelihoodfunktion $L(\lambda; R_1, \ldots, R_n)$ ist gegeben durch

$$L(\lambda; R_1, \ldots, R_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_R(R_i|\lambda) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \lambda^2 R_i e^{-\lambda R_i} \;=\; \lambda^{2n} \prod_{i=1}^{n} R_i e^{-\lambda R_i}.$$

Die Log-Likelihoodfunktion $l(\lambda; R_1, \ldots, R_n)$ ist dann

$$l(\lambda; R_1, \ldots, R_n) \;=\; \log(L(\lambda; R_1, \ldots, R_n)) \;=\; 2n\log(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} \log(R_i) - \lambda R_i.$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\lambda}^{\text{MLE}}$ ist definiert durch

$$\widehat{\lambda}^{\text{MLE}} \;=\; \arg\max_{\lambda>0}\{L(\lambda; R_1, \ldots, R_n)\} \;=\; \arg\max_{\lambda>0}\{l(\lambda; R_1, \ldots, R_n)\}.$$

Um $l(\lambda; X_1, \ldots, X_n)$ zu maximieren, leiten wir nach λ ab und setzen die Ableitung gleich 0. Wir haben

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} l(\lambda; R_1, \ldots, R_n) \;=\; \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} R_i \;\stackrel{!}{=}\; 0.$$

Wir lösen nun obige Gleichung nach λ auf. Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\lambda}^{\text{MLE}}$ ist dann

$$\widehat{\lambda}^{\text{MLE}} \;=\; \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} R_i}.$$

Bitte wenden!

Man beachte, dass $\widehat{\lambda}^{\mathrm{MLE}}$ strikt grösser als 0 ist.

Bemerkung: Für die zweite Ableitung der Log-Likelihoodfunktion $l(\lambda; R_1, \dots, R_n)$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} l(\lambda; R_1, \dots, R_n) \;=\; \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} R_i\right) \;=\; -\frac{2n}{\lambda^2} \;<\; 0.$$

Die Funktion $l(\cdot; R_1, \dots, R_n)$ ist also strikt konkav für $\lambda > 0$ und nimmt daher tatsächlich im Punkt $\widehat{\lambda}^{MLE}$ ihr Maximum an.

b) (3 Punkte) Da X exponentialverteilt ist mit Parameter 1, haben wir für die Dichte f_X von X

$$f_X(x) \;=\; e^{-x} \cdot 1_{\{x \geq 0\}}.$$

Die Dichte f_Y der auf $[1,3]$ gleichverteilten Zufallsvariable Y ist gegeben durch

$$f_Y(y) \;=\; \frac{1}{2} \cdot 1_{\{1 \leq y \leq 3\}}.$$

Mit Hilfe dieser beiden Dichten berechnen wir für $u > 0$

$$\begin{aligned} P[X > uY] \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{x > uy\}}\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dxdy \;=\; \frac{1}{2} \int_1^3 \int_{uy}^{\infty} e^{-x}\, dxdy \\ &=\; \frac{1}{2} \int_1^3 \left[-e^{-x}\right]_{uy}^{\infty} dy \;=\; \frac{1}{2} \int_1^3 e^{-uy}\, dy \;=\; \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u} e^{-uy}\right]_1^3 \\ &=\; \frac{1}{2u}\left(e^{-u} - e^{-3u}\right) \;=\; \frac{1}{2u} e^{-u}\left(1 - e^{-2u}\right). \end{aligned}$$

Für $u > 0$ gilt also

$$F_U(u) \;=\; P[X/Y \leq u] \;=\; P[X \leq uY] \;=\; 1 - P[X > uY] \;=\; 1 - \frac{1}{2u} e^{-u}\left(1 - e^{-2u}\right).$$

Ausserdem, da $X > 0$ ist und $Y \in [1,3]$, jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1, ist $U = X/Y > 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1. Also ist $F_U(u) = 0$ für $u \leq 0$. Zusammenfassend haben wir

$$F_U(u) \;=\; \begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2u} e^{-u}\left(1 - e^{-2u}\right), & u > 0. \end{cases}$$

c) (4 Punkte) Die Fläche A des Rechtecks ist gegeben durch $A = X \cdot Y$. Sei Z die beste lineare Prognose von X durch A. Gemäss dem Skript haben wir für Z die Formel:

$$Z \;=\; \frac{\mathrm{Cov}(X, A)}{\mathrm{Var}(A)}\,(A - E[A]) + E[X].$$

Wir bemerken zuerst, dass $E[Y] = 2$. Ausserdem haben wir

$$\begin{aligned} E[X] \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \;=\; \int_0^{\infty} x e^{-x}\, dx \;=\; \left[-x e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx \\ &=\; \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx \;=\; \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} \;=\; 1 \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-x}\,dx \\ &= \int_0^{\infty} 2xe^{-x}\,dx = 2E[X] = 2, \end{aligned}$$

sowie

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \int_1^3 \frac{1}{2}y^2\,dy = \left[\frac{1}{6}y^3\right]_1^3 = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{13}{3}.$$

Beachten Sie, dass X und Y unabhängig sind. Dies wird in den folgenden Berechnungen immer wieder verwendet. Wir berechnen zuerst

$$E[A] = E[XY] = E[X]E[Y] = 1 \cdot 2 = 2.$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X, A) &= E[XA] - E[X]E[A] = E[X^2Y] - E[X]E[A] \\ &= E[X^2]E[Y] - E[X]E[A] = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(A) &= E[A^2] - E[A]^2 = E[X^2Y^2] - E[A]^2 = E[X^2]E[Y^2] - E[A]^2 \\ &= 2 \cdot \frac{13}{3} - 2^2 = \frac{26}{3} - 4 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Aus den obigen Berechnungen folgt für die beste lineare Prognose Z von X durch A:

$$Z = \frac{2}{\frac{14}{3}}(A-2) + 1 = \frac{3}{7}A - \frac{3}{7} \cdot 2 + 1 = \frac{3}{7}A + \frac{1}{7}.$$