

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

Bitte ausfüllen!

Name	
Vorname	
Legi-Nr.	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		

Punktesumme	
Kontrolle	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

- **Bitte ...**
 - Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
 - Tragen Sie Ihre Daten in das Deckblatt ein.
 - Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
 - Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
 - Verwenden Sie keinen Tipp-Ex oder Ähnliches.
 - Verwenden Sie **keinen roten oder grünen Stift** und auch **keinen Bleistift**.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte** sowie **Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 5 beidseitig von Hand beschriebene A4-Blätter, kein Taschenrechner.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariable X sei gleich 1, falls beim ersten Wurf Kopf erscheint, und gleich 0, falls beim ersten Wurf Zahl erscheint. Die Zufallsvariable Y gibt an, wie oft im zweiten und dritten Wurf insgesamt Kopf erscheint. Weiter sei $S = X + Y$ und $U = X \cdot Y$.

- Berechnen Sie $E[2S - 3]$ und $\text{Var}(2S + 1)$.
- Berechnen Sie zuerst die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $X = 0$ ist, gegeben, dass $S = 2$, und dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $U = 0$ ist, gegeben, dass $S = 2$.
- Bestimmen Sie die Verteilung von U und berechnen Sie $E\left[\frac{1}{U+1}\right]$.

2. (10 Punkte) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^x + c_0, & x < 0, \\ \frac{3}{8} + \frac{x}{16}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{3}{4} + c_1(1 - e^{-x}), & x \geq 2. \end{cases}$$

Weiter sei R eine gleichverteilte Zufallsvariable auf $[1, 2]$.

- Bestimmen Sie c_0 und c_1 und berechnen Sie $P[1 \leq X < 2]$.
- Sei A die Fläche eines Kreises mit Radius R . Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_A und die Dichte f_A von A sowie $P[A > 4\pi]$.
- Sei

$$U = \begin{cases} 2R, & \text{falls } R \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{4}{R}, & \text{falls } R > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Berechnen Sie $P\left[U \leq \frac{5}{2}\right]$.

Bitte wenden!

3. (10 Punkte) Sei R eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_R(r|\lambda) = \begin{cases} \lambda^2 r e^{-\lambda r}, & r > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Weiter sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1 und Y eine gleichverteilte Zufallsvariable auf $[1, 3]$. Wir nehmen an, dass X und Y unabhängig sind.

- a) Seien R_1, R_2, \dots, R_n unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilung wie R . Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ .
- b) Sei $u > 0$. Berechnen Sie zuerst $P[X > uY]$ und verwenden Sie dann dieses Resultat, um die Verteilungsfunktion F_U von $U = X/Y$ zu bestimmen.
- c) Sei A die Fläche des Rechtecks mit den Eckpunkten $(0, 0), (X, 0), (0, Y), (X, Y)$. Berechnen Sie die beste lineare Prognose von X durch A .