Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. *Lösung:*

a)
- Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man

$$P(E) = P(E|G)P(G) + P(E|G^c)P(G^c) = \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

- Aus der Formel von Bayes folgt

$$P(G|E) = \frac{P(E|G)P(G)}{P(E|G)P(G) + P(E|G^c)P(G^c)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann man direkt aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnen

$$P(G|E) = \frac{P(G \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|G)P(G)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

wobei wir für $P(E) = \frac{1}{4}$ die Lösung des ersten Punktes verwendet haben.

b)
- Für $k \geq 1,\ k \in \mathbb{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit $P(T = k)$ gegeben durch

$$P(T = k) = P(Z^c)^{k-1}P(Z) = \left(\frac{17}{20}\right)^{k-1}\frac{3}{20},$$

wobei Z das Ereignis, dass mit einem zufällig gezogenen Würfel eine 2 gewürfelt wird, bezeichnet. Es gilt

$$P(Z) = P(Z|G)P(G) + P(Z|G^c)P(G^c) = \frac{1}{10}\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{3}{4} = \frac{3}{20}.$$

- Die Zufallsvariable T ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{3}{20}$.
- Aus der Vorlesung (siehe Skript Seite 35) wissen wir, dass für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable T mit Parameter p der Erwartungswert $E[T]$ gegeben ist durch

$$E[T] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{3}{20}} = \frac{20}{3}.$$

Explizit kann die Formel hergeleitet werden mit:

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{k\geq 1} kP(T = k) = \sum_{k\geq 1} k(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k\geq 1} k(1-p)^{k-1} \\ {\scriptstyle (z:=1-p)} &= p\sum_{k\geq 1} k(z)^{k-1} = p(\sum_{k\geq 1} z^k)' = p(\frac{1}{1-z})' = p\frac{1}{(1-z)^2} = p\frac{1}{p^2} \\ {\scriptstyle (\text{für } p=\frac{3}{20})} &= \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

c) Die Zufallsvariable U ist binomialverteilt mit Parametern $(n, p) = (10, \frac{1}{4})$.

Bitte wenden!

- Aus der Vorlesung (siehe Skript Seite 37) wissen wir, dass in diesem Fall der Erwartungswert $E[U]$ gegeben ist durch

$$E[U] = np = \frac{5}{2}.$$

- Aus der Vorlesung (siehe Skript Seite 38) wissen wir, dass in diesem Fall die Varianz $Var(U) = E[U^2] - (E[U])^2$ gegeben ist durch

$$Var(U) = E[U^2] - (E[U])^2 = n(p - p^2) = 10(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}) = \frac{15}{8}.$$

2. *Lösung:*

a) - Die Verteilung von (U, V) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P[U = 0, V = 0] &= a, \\ P[U = 0, V = 1] &= P[U = 0] - P[U = 0, V = 0] = 1/4 - a, \\ P[U = 1, V = 0] &= P[V = 0] - P[U = 0, V = 0] = 1/2 - a, \\ P[U = 1, V = 1] &= 1 - P[U = 0, V = 0] - P[U = 1, V = 0] - P[U = 0, V = 1] \\ &= 1 - a - (1/2 - a) - (1/4 - a) = 1/4 + a. \end{aligned}$$

Da $P[U = 0, V = 0]$, $P[U = 0, V = 1]$ u.s.w. Wahrscheinlichkeiten sein müssen, also Zahlen zwischen 0 und 1, darf a nur Werte in $[0, 1/4]$ annehmen.

- Die Zufallsvariablen U und V sind genau dann unabhängig, wenn für $i, j = 0, 1$ gilt:

$$P[U = i, V = j] = P[U = i]P[V = j].$$

Dies gilt hier für $a = 1/8$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} E[U] &= 0 \cdot P[U = 0] + 1 \cdot P[U = 1] = 1 - 1/4 = 3/4, \\ E[V] &= 0 \cdot P[V = 0] + 1 \cdot P[V = 1] = 1 - 1/2 = 1/2, \\ E[UV^2] &= 0 \cdot P[UV^2 = 0] + 1 \cdot P[UV^2 = 1] = P[U = 1, V = 1] = 1/4 + a. \end{aligned}$$

c) Gemäss der Formel aus dem Skript ist die beste lineare Prognose von V durch U gegeben durch

$$P_V = \frac{\operatorname{cov}(V, U)}{\operatorname{Var}(U)} (U - E[U]) + E[V].$$

Daher berechnen wir

$$\operatorname{cov}(V, U) = E[VU] - E[V]E[U] = \left(\frac{1}{4} + a\right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = a - \frac{1}{8},$$

und

$$\operatorname{Var}(U) = E[U^2] - E[U]^2 = E[U](1 - E[U]) = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}.$$

Damit ist die beste lineare Prognose von V durch U gegeben durch

$$P_V = \left(\frac{16a - 2}{3}\right) U - 4a + 1.$$

3. *Lösung:*

a)

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dydx.$$

Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$, für alle $x \in [0,1]$, und $\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = 0$ für alle $x \in (-\infty,0) \cap (1,\infty)$, also

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^1 x \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) dx = \frac{2}{9} + \frac{2}{6} = \frac{5}{9}.$$

Um die Varianz zu bestimmen berechnen wir

$$\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{18}.$$

Damit erhalten wir

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}\,[X])^2 = \frac{7}{18} - \frac{25}{81} = \frac{13}{162}.$$

b) Für $x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$ gilt $f_X(x) = 0$. Für $x \in [0,1]$ erhalten wir

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy =$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\int_0^1 ydy = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Für $y \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$ gilt $f_Y(y) = 0$. Für $y \in [0,1]$ erhalten wir

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx =$$

$$\frac{4}{3}y + \frac{2}{3}\int_0^1 xdx = \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}.$$

Für das Produkt der Randdichten erhalten wir

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{2}{9}(x + 4y + 4xy + 1),$$

für alle $x \in [0,1]$ und $y \in [0,1]$. Dies lässt den Schluss zu, dass X und Y nicht Unabhängig sind, da es ein $x \in [0,1]$ und $y \in [0,1]$ gibt, so dass $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{(X,Y)}(x,y)$.

(c)

$$P[X \le Y] = P[0 \le Y - X] = \int_0^1 \int_x^1 f_{(X,Y)}(x,y)dydx = \frac{2}{3}\int_0^1 \int_x^1 (x+2y)\,dydx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(x(1-x) + 2\int_x^1 ydy\right) dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(x(1-x) + y^2|_{y=x}^{y=1}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(x(1-x) + 1 - x^2\right) dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(1 + x - 2x^2\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}x^2 - 2\frac{x^3}{3}\right)|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{9}.$$