Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. *Lösung:*

a) (i) Für $x = 0, 1, 2, 3,$ gibt es

$$\binom{3}{x}\binom{3}{3-x}, \tag{1}$$

mögliche Teams mit x Männer und $y = 3 - x$ Frauen. Es gibt

$$\sum_{x=0}^{2}\binom{3}{x}\binom{3}{3-x} = \binom{3}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{2}\binom{3}{1} + \binom{3}{0}\binom{3}{3} = 3\cdot 3 + 3\cdot 3 + 1 = 19$$

mögliche Teams mit mindestens eine Frau. Genau eins von diesen besteht nur aus Frauen. Also ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Team nur aus Fraun besteht, gegeben, dass das Team eine Frau hat

$$\frac{1}{19}.$$

(ii) Für $x = 0, 1, 2$ gibt es

$$\binom{3}{x}\binom{3}{2-x},$$

mögliche Teams zu denen, x Männer, Helga und $2 - x$ zusätzliche Frauen gehören. Also ist

$$\sum_{x=0}^{2}\binom{3}{x}\binom{2}{2-x} = \binom{3}{0}\binom{2}{2} + \binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{2}\binom{2}{0} = 1 + 3\cdot 2 + 3 = 10$$

die Anzahl Teams, zu denen Helga gehören. Genau eins von diesen besteht nur aus Frauen. Also ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Team nur aus Fraun besteht, gegeben, dass Helga im Team ist

$$\frac{1}{10}.$$

b) Selbverständlich ist

$$P[X = x, Y = y] = 0, \text{ wenn } y \neq 3 - x.$$

Von (1) sehen wir, dass für $y = 3 - x$

$$P[X = x, Y = y] = \frac{\binom{3}{x}\binom{3}{y}}{\sum_{x=0}^{3}\binom{3}{x}\binom{3}{3-x}}.$$

Wir haben

$$\sum_{x=0}^{3}\binom{3}{x}\binom{3}{3-x} = 1 + 3\cdot 3 + 3\cdot 3 + 1 = 20.$$

Also ist

$$\begin{aligned} P[X = 3, Y = 0] &= \tfrac{1}{20}, \\ P[X = 2, Y = 1] &= \tfrac{9}{20}, \\ P[X = 1, Y = 2] &= \tfrac{9}{20}, \\ P[X = 0, Y = 3] &= \tfrac{1}{20}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Wir haben

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} xP\,[X = x] = \sum_{x=0}^{3} xP\,[X = x, Y = 3 - x] = \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}.$$

Da X und Y offensichtlich die selbe Verteilung haben (Symmetrie), ist auch

$$E[Y] = \frac{3}{2}.$$

c) Wir haben

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2\,,$$

und

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 P\,[X = x, Y = 3 - x] = \frac{9}{20} + 4 \cdot \frac{9}{20} + 9 \cdot \frac{1}{20} = \frac{54}{20}.$$

Da

$$(E[X])^2 = \frac{9}{4},$$

ist also

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{54}{20} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20}.$$

Offensichtlich haben wir immer

$$X + Y = 3,$$

und deshalb ist

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(3) = 0.$$

Schliesslich sehen wir von der Formel

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y),$$

dass

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{\mathrm{Var}(X + Y) - \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)}{2} = -\frac{\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)}{2}.$$

Da X und Y dieselbe Verteilung haben, ist

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = \frac{9}{20},$$

und also

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{9}{20}.$$

2. *Lösung:*

a) Sei A das Ereignis, dass es genau 2 Chips gibt, die jeweils mindestens eine defekte Stelle haben, und für $i = 1, 2, 3$, sei

$$A_i = \{N_i = 0,\ N_j > 0,\ j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}\}.$$

Die Ereignisse A_i sind disjunkt und es gilt $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Wegen der Unabhängigkeit erhält man nacheinander

$$P[A_2] = P[A_1] = P[N_1 = 0] \cdot P[N_2 > 0] \cdot P[N_3 > 0] = e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})(1 - e^{-2\lambda})$$

und

$$P[A_3] = P[N_3 = 0] \cdot P[N_1 > 0] \cdot P[N_2 > 0] = e^{-2\lambda}(1 - e^{-\lambda})^2.$$

Insgesamt ergibt dies

$$\begin{aligned} P[A] &= \sum_{i=1}^{3} P[A_i] \\ &= 2e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})(1 - e^{-2\lambda}) + e^{-2\lambda}(1 - e^{-\lambda})^2 \\ &= e^{-\lambda}(2 - e^{-\lambda} - 4e^{-2\lambda} + 3e^{-3\lambda}). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Es gilt

$$P[C_3 \text{ gewählt}|N=1] = \frac{P[N=1|C_3 \text{ gewählt}] \cdot P[C_3 \text{ gewählt}]}{P[N=1]}$$

Zum einen ist $P[C_3 \text{ gewählt}] = 1/3$, zum anderen ist

$$P[N=1|C_3 \text{ gewählt}] = P[N_3 = 1] = e^{-2\lambda} \cdot 2\lambda$$

und

$$\begin{aligned} P[N=1] &= \sum_{i=1}^{3} P[N=1|C_i \text{ gewählt}] \cdot P[C_i \text{ gewählt}] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} P[N_i = 1] \\ &= \frac{1}{3}(2e^{-\lambda} \cdot \lambda + e^{-2\lambda} \cdot 2\lambda) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\lambda e^{-2\lambda}(e^{\lambda} + 1) \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$P[C_3 \text{ gewählt}|N=1] = \frac{e^{-2\lambda} 2\lambda/3}{e^{-2\lambda} 2\lambda(e^{\lambda}+1)/3} = \frac{1}{e^{\lambda}+1}.$$

c) Im Folgenden wird wiederholt die Tatsache verwendet, dass für zwei unabhängige Poisson verteilte Zufallsvariablen X und Y gilt:

$$X \sim \text{Poi}(\lambda), Y \sim \text{Poi}(\mu) \quad \Longrightarrow \quad X + Y \sim \text{Poi}(\lambda + \mu).$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} P[N=1, T=2] &= \sum_{i=1}^{3} P[T=2|N=1, C_i \text{ gewählt}] \cdot P[N=1, C_i \text{ gewählt}] \\ &= \sum_{i=1}^{3} P[T=2|N_i=1, C_i \text{ gewählt}] \cdot P[N_i = 1] \cdot P[C_i \text{ gewählt}] \\ &= \frac{1}{3}\big(2P[\text{Poi}(3\lambda)=1] \cdot P[\text{Poi}(\lambda)=1] + P[\text{Poi}(2\lambda)=1]^2\big) \\ &= \frac{1}{3}\big(2e^{-3\lambda} 3\lambda \cdot e^{-\lambda}\lambda + (e^{-2\lambda} 2\lambda)^2\big) \\ &= \frac{10}{3}\lambda^2 e^{-4\lambda}. \end{aligned}$$

3. *Lösung:*

a) Wir bemerken zunächst, dass für $Z \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, die Formeln

$$\mathrm{E}[Z] = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2}$$

gelten. Die Linearität des Erwartungswertes und (2) implizieren

$$\mathrm{E}[X - Y] = \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[Y] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Aus der Unabhängigkeit, schlussfolgern wir als erstes, dass $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$, oder anders ausgedrückt $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, und als zweites, mit Hilfe der Bilinearität von $\mathrm{Cov}(\cdot,\cdot)$ und der allgemeinen Beziehung $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X,X)$, dass

$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

wobei wir wieder (2) verwendet haben.

b) Fixiere ein $t \geq 0$. Die Unabhängigkeit, die Verteilungseigenschaften von X und Y sowie die Definition von *min* implizieren, dass

$$\mathrm{P}[U > t] = \mathrm{P}[\min(X,Y) > t] = \mathrm{P}[X > t, Y > t] = \mathrm{P}[X > t]\mathrm{P}[Y > t] = e^{-t}e^{-2t} = e^{-3t}.$$

Dies bedeutet $U \sim \mathrm{Exp}(3)$ und somit $\mathrm{E}[U] = \frac{1}{3}$ und $f_U(t) = 3e^{-3t}\mathbf{1}_{\{t>0\}}$.

Bei der Zufallsvariablen $V = \max(X,Y)$ berechnen wir direkt die Verteilungsfunktion. Wiederum aufgrund der Unabhängigkeit, den Verteilungseigenschften und diesmal der Definition von *max* gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} F_V(t) = \mathrm{P}[V \leq t] &= \mathrm{P}[\max(X,Y) \leq t] = \mathrm{P}[X \leq t, Y \leq t] \\ &= \mathrm{P}[X \leq t]\mathrm{P}[Y \leq t] = (1 - e^{-t})(1 - e^{-2t}). \end{aligned}$$

Die Dichtefunktion ist gerade die Ableitung der Verteilungsfunktion, d.h.

$$\begin{aligned} f_V(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_V(t) = e^{-t}(1 - e^{-2t}) + 2e^{-2t}(1 - e^{-t}) = e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}, \quad t > 0, \\ &= 0, \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist demnach

$$\mathrm{E}[V] = \int_0^\infty x f_V(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty xe^{-2x}\mathrm{d}x + \int_0^\infty xe^{-x}\mathrm{d}x - 3\int_0^\infty xe^{-3x}\mathrm{d}x = \frac{7}{6},$$

wobei wir wieder (2) benutzt haben.

c) Weil X und Y unabhängige Exp(1)- beziehungsweise Exp(2)-verteilte Zufallsvariablen sind, ist die gemeinsame Dichtefunktion gerade das Produkt der jeweiligen Dichtefunktionen, d.h.

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 2e^{-(x+2y)}\mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}.$$

Fixiere eine Zahl $a \geq 0$. Mit der Notation $x^+ := \max(x,0)$ und dem Fubini-Tonelli Theorem, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[|X - Y| \leq a] &= 2\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{|x-y|\leq a\}} e^{-(x+2y)}\mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{(y-a)^+\leq x\leq y+a\}} e^{-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}\mathrm{d}x\right) e^{-2y}\mathbf{1}_{\{y>0\}}\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^\infty \underbrace{\left(\int_{(y-a)^+}^{y+a} e^{-x}\mathrm{d}x\right)}_{=e^{-(y-a)^+}-e^{-(y+a)}} e^{-2y}\mathrm{d}y \\ &= 2\left(\int_0^a + \int_a^\infty\right)\left(e^{-(y-a)^+} - e^{-(y+a)}\right)e^{-2y}\mathrm{d}y \\ &= 2\left(\underbrace{\int_0^a \left(1 - e^{-(y+a)}\right)e^{-2y}\mathrm{d}y}_{=1+\frac{2}{3}e^{-4a}-e^{-2a}-\frac{2}{3}e^{-a}} + \underbrace{\int_a^\infty \left(e^{-(y-a)} - e^{-(y+a)}\right)e^{-2y}\mathrm{d}y}_{\frac{2}{3}e^{-2a}-\frac{2}{3}e^{-4a}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{3}\left(2e^{-a} + e^{-2a}\right). \end{aligned}$$

Die Dichtefunktion ist gerade die Ableitung der eben berechneten Funktion, d.h.

$$\begin{aligned} f_{|X-Y|}(a) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathrm{P}[|X - Y| \leq a] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{1}{3}\left(2e^{-a} + e^{-2a}\right)\right) = \frac{2}{3}e^{-a}(1 + e^{-a}), \quad a \geq 0, \\ &= 0, \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$