Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Ein Team von drei Personen wird zufällig aus einer Gruppe von sechs Personen ausgewählt. Von diesen sechs Personen sind drei Frauen (Anna, Elsa und Helga) und drei Männer (Franz, Mario und Tobias). Sei X die Anzahl Männer und Y die Anzahl Frauen im ausgewählten Team.

a) (i) Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Team nur aus Frauen besteht, gegeben, dass das Team mindestens eine Frau hat?

(ii) Was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das Team nur aus Frauen besteht, gegeben, dass Helga im Team ist?

b) Finden Sie die gemeinsame Verteilung von (X, Y). Berechnen Sie $E[X]$ und $E[Y]$.

c) Berechen Sie $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(X+Y)$ und $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

2. (10 Punkte) Sei N_i die Anzahl defekter Stellen auf dem Chip C_i, für $i = 1, 2, 3$. Wir nehmen an, dass N_i, $i = 1, 2, 3$, unabhängig sind, wobei N_1 und N_2 beide Poisson-verteilt sind mit Parameter $\lambda > 0$ und N_3 Poisson-verteilt ist mit Parameter 2λ. Einer der drei Chips wird zufällig ausgewählt. Seien N die Anzahl defekter Stellen auf diesem Chip, und T die totale Anzahl defekter Stellen auf den drei Chips.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es genau zwei Chips gibt, die jeweils mindestens eine defekte Stelle haben.

b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Chip ausgewählt wurde, gegeben, dass $N = 1$.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $N = 1$ ist und es insgesamt zwei defekte Stellen auf den drei Chips gibt.

3. (10 Punkte) Seien X und Y zwei unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen mit respektiven Parametern 1 und 2.

a) Berechnen Sie $\mathrm{E}[X - Y]$, $\mathrm{Var}(X - Y)$ und $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

b) Berechnen Sie die Dichtefunktion von $U = \min(X, Y)$ und $V = \max(X, Y)$, sowie die Erwartungswerte $\mathrm{E}[U]$ und $\mathrm{E}[V]$.

c) Berechnen Sie $\mathrm{P}[|X - Y| \leq a]$, für $a \geq 0$. Was ist die Dichtefunktion von $|X - Y|$?
Hinweis: Eine Skizze der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leq a,\ x \geq 0, y \geq 0\}$ könnte hilfreich sein.