Prof. Dr. A.-S. Sznitman ETH Zürich Winter 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Drei verschiedene Zahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ werden zufällig gewählt. Sei X die Anzahl der *geraden* Zahlen, die gewählt worden sind.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 6 gewählt wurde. Berechnen Sie zudem den Erwartungswert von X.

b) Gegeben, die Zahl 6 wurde gewählt, was ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei gerade Zahlen gewählt wurden?

Wir ändern das Verfahren und ziehen zwei Zahlen wie folgt. Wir ziehen die erste Zahl zufällig in $\{1, 2, 3\}$. Ist die gezogene Zahl *ungerade*, so ziehen wir die zweite Zahl zufällig in $\{1, 4, 5\}$. Ansonsten ziehen wir die zweite Zahl zufällig in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden gezogenen Zahlen *gerade* ist?

2. (10 Punkte) Man betrachtet einen Zylinder mit zufälliger Höhe H und zufälligem Radius R, wobei H und R unabhängig sind. Wir nehmen an, dass H gleichmässig auf dem Intervall $[0, 1]$ verteilt ist und dass R eine Exponentialverteilung mit Parameter 1 hat. Seien V das Volumen des Zylinders und S die Fläche des Zylinders, also $V = \pi R^2 H$ und $S = 2\pi(RH + R^2)$.
Hinweis: Es darf angenommen werden, dass $E\left[R^k\right] = k!$ für $k \in \mathbb{N}$.

a) Berechnen Sie $E[V]$, $E[S]$ sowie $\operatorname{cov}(S, V)$.

b) Was ist die beste lineare Prognose von V durch R?

c) Berechnen Sie die Dichte von $T = H/R$.

Bitte wenden!

3. (10 Punkte) Eine Grösse X wird beschrieben durch die Dichte

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{c(\vartheta)}{(1+x)^{\vartheta+1}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für eine Konstante $c(\vartheta) \in \mathbb{R}$, wobei $\vartheta > 1$ ein Parameter ist.

a) Bestimmen Sie die Konstante $c(\vartheta)$ und $E[X]$ in Abhängigkeit von ϑ.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $\log(1 + X)$. Wie heisst die Verteilung von $\log(1 + X)$?

c) Basierend auf $n \geq 1$ unabhängigen Zufallsvariablen mit jeweiliger Dichte f_ϑ, was ist der Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\vartheta}$ von ϑ? Berechnen Sie zudem $\mathrm{Var}(1/\hat{\vartheta})$.