Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. a) [4 Punkte] Es gilt $F_Y(y) = P[Y \le y] = 0$ für $y \le 0$. Für $y > 0$ gilt

$$F_Y(y) = 3\int_0^y \frac{1}{(1+y')^4}dy' = -\frac{1}{(1+y')^3}\bigg|_0^y = 1 - \frac{1}{(1+y)^3}.$$

Weiter gilt

$$E[Y] = E[Y+1]-1 = 3\int_0^\infty \frac{1}{(1+y')^3}dy' - 1 = -\frac{3}{2(1+y')^2}\bigg|_0^\infty - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

b) [4 Punkte] Es gilt $Z \in (0,1)$. Daher gilt $F_Z(z) = P[Z \le z] = 0$ für $z \le 0$, und $F_Z(z) = 1$ für $z \ge 1$. Für $z \in (0,1)$ gilt

$$F_Z(z) = P[Y \ge 1/z - 1] = 1 - F_Y(1/z - 1) = z^3.$$

Für die Dichtefunktion von Z gilt $f_Z(z) = 0$ für $z \notin (0,1)$. Für $z \in (0,1)$ gilt

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = 3z^2.$$

c) [2 Punkte] Es gilt

$$\begin{aligned}
P[U \le 1] &= P[3Y \le 1, Y \le 1] + P[Y/3 \le 1, Y > 1] \\
&= P[Y \le 1/3] + P[1 < Y < 3] \\
&= F_Y(1/3) + F_Y(3) - F_Y(1) \\
&= 1 - \frac{1}{(4/3)^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{64 - 27 - 1 + 8}{64} = \frac{44}{64} = \frac{11}{16}.
\end{aligned}$$

2. **a)** [3 Punkte] Wegen $X, Y \in \{-1, 1\}$ gilt

$$P[X=-1] = \frac{1}{2}, \qquad P[Y=1] = \frac{3}{4}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
P[X=Y=1] &= p; \\
P[X=1, Y=-1] &= P[X=1] - P[X=Y=1] = \frac{1}{2} - p; \\
P[X=-1, Y=1] &= P[Y=1] - P[X=Y=1] = \frac{3}{4} - p; \\
P[X=Y=-1] &= 1 - \left(p + \frac{1}{2} - p + \frac{3}{4} - p\right) = p - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Da obige Wahrscheinlichkeiten alle in $[0,1]$ sein müssen, muss $p \in [1/4, 1/2]$ gelten.

b) [3 Punkte] Es gilt $Z \in \{-1, 1\}$ und

$$\begin{aligned}
P[Z=-1] &= P[X \neq Y] = \frac{1}{2} - p + \frac{3}{4} - p = \frac{5}{4} - 2p; \\
P[Z=1] &= P[X=Y] = p + p - \frac{1}{4} = 2p - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt für $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_Z(t) = E[e^{itZ}] = e^{it} P[Z=1] + e^{-it} P[Z=-1] = e^{it}\left(2p - \frac{1}{4}\right) + e^{-it}\left(\frac{5}{4} - 2p\right).$$

c) [4 Punkte] Da $X^2 = Y^2 = 1$ gilt, folgt $S = (X+Y)Z = X^2 Y + Y^2 X = X + Y \in \{-2, 0, 2\}$. Für die Verteilung von S gilt

$$\begin{aligned}
P[S=-2] &= P[X=Y=-1] = p - \frac{1}{4}; \\
P[S=0] &= P[X \neq Y] = \frac{5}{4} - 2p; \\
P[S=2] &= P[X=Y=1] = p.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0; \\
E[Y] &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \\
E[XY] &= E[Z] = 2p - \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{4} - 2p\right) = 4p - \frac{6}{4}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, da $X^2 = Y^2 = 1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - E[X+Y]^2 \\
&= 2 + 2E[XY] - (E[X] + E[Y])^2 = 2 + 8p - \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = 8p - \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

3. **a)** [4 Punkte] Es gilt $F_{X_1}(x) = P[X_1 \leq x] = P[Z \leq x - \alpha]$ für $x \in \mathbb{R}$. Also ist $F_{X_1}(x) = 0$ für $x < \alpha$ und für $x \geq \alpha$ gilt $F_{X_1}(x) = 1 - e^{\alpha - x}$.
Für die Dichtefunktion von X_1 gilt $f_{X_1}(x) = 0$ für $x < \alpha$, und $f_{X_1}(x) = e^{\alpha - x}$ für $x \geq \alpha$. Also gilt für $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{X_1}(x) = e^{\alpha - x} 1_{\{x \geq \alpha\}}.$$

Für die Likelihood-Funktion gilt

$$L(\alpha; x_1, x_2) \; = \; f_{X_1}(x_1) f_{X_1}(x_2) \; = \; e^{\alpha - x_1} 1_{\{x_1 \geq \alpha\}} e^{\alpha - x_2} 1_{\{x_2 \geq \alpha\}} \; = \; e^{2\alpha - x_1 - x_2} 1_{\{\alpha \leq \min(x_1, x_2)\}}.$$

Diese Funktion ist maximal für $\hat{\alpha} = \min(x_1, x_2)$.

b) [3 Punkte] Wegen der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 gilt

$$E[X_1 e^{-X_2}] \; = \; E[X_1] E[e^{-X_2}] \; = \; 2 \int_0^{\infty} e^{-1-x} e^{-x} dx \; = \; e^{-1}.$$

Für $y \in \mathbb{R}$ gilt wegen der Unabhängigkeit von X_1 und X_2,

$$\begin{aligned} P[Y \leq y] &= 1 - P[\min(X_1, X_2) > y] \\ &= 1 - P[X_1 > y, X_2 > y] \; = \; 1 - P[1 + Z > y]^2 \; = \; 1 - (1 - P[Z \leq y - 1])^2. \end{aligned}$$

Also ist $F_Y(y) = P[Y \leq y] = 0$ für $y < 1$, und $F_Y(y) = 1 - e^{2-2y}$ für $y \geq 1$.

c) [3 Punkte] Es ist

$$\mathrm{Var}(X_1) \; = \; \mathrm{Var}(1 + Z) \; = \; \mathrm{Var}(Z) \; = \; 1,$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X_1, U) &= E[X_1 U] - E[X_1] E[U] \\ &= E[X_1^2 - 4X_1 X_2] - E[X_1] \left(E[X_1] - E[4X_2] \right) \\ &= E[X_1^2] - E[4X_1 X_2] - E[X_1]^2 + E[4X_1 X_2] \; = \; \mathrm{Var}(X_1) \; = \; 1. \end{aligned}$$

Die beste lineare Prognose von U durch X_1 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mathrm{cov}(X_1, U)}{\mathrm{Var}(X_1)} (X_1 - E[X_1]) + E[U] \\ &= X_1 - E[X_1] + E[X_1] - 4E[X_2] \; = \; X_1 - 4(1 + E[Z]) \; = \; X_1 - 8. \end{aligned}$$