Prof. Dr. A.-S. Sznitman ETH Zürich Winter 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Sei Y eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{(1+y)^4}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y.
Berechnen Sie $E[Y]$.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $Z = (1+Y)^{-1}$.
Berechnen Sie die Dichtefunktion von Z.

c) Sei die Zufallsvariable U definiert durch

$$U = \begin{cases} 3Y, & \text{falls } Y \leq 1, \\ \frac{1}{3}Y, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $P[U \leq 1]$.

2. (10 Punkte) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1, 1\}$, so dass

$$P[X = 1] = \frac{1}{2}, \qquad P[Y = -1] = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad P[X = 1, Y = 1] = p,$$

für ein $p \in [0, 1]$.

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y.
Welche Werte darf p annehmen?

b) Berechnen Sie die Verteilung von $Z = XY$.
Bestimmen Sie die charakteristische Funktion $\varphi_Z(t) = E[e^{itZ}]$, $t \in \mathbb{R}$, von Z.

c) Berechnen Sie die Verteilung von $S = (X+Y)Z$.
Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X+Y)$.

Bitte wenden!

3. (10 Punkte) Sei Z eine Zufallsvariable mit der Exponentialverteilung mit Parameter 1. Seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen mit der jeweils gleichen Verteilung wie $\alpha + Z$, für einen Parameter $\alpha \geq 0$.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\alpha}$ von α basierend auf zwei Beobachtungen x_1 und x_2.

Sei nun $\alpha = 1$.

b) Berechnen Sie $E[X_1 e^{-X_2}]$.
Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = \min(X_1, X_2)$.

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X_1)$ sowie die Kovarianz von X_1 und $U = X_1 - 4X_2$.
Berechnen Sie die beste lineare Prognose von U durch X_1.