Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. a) (3 Punkte)
(i) Von den sieben zur Verfügung stehenden Zahlen sind 3 gerade $(2, 4, 6)$ und 4 ungerade $(1, 3, 5, 7)$. Gemäss dem Laplace-Modell haben wir

$$P[X=0] \;=\; \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} \;=\; \frac{4}{\frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}} \;=\; \frac{4}{35} \qquad \text{sowie} \qquad P[X=3] \;=\; \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} \;=\; \frac{1}{35}.$$

Wir berechnen nun (siehe die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit)

$$P[X=3|X\geq 1] \;=\; \frac{P[X=3, X\geq 1]}{P[X\geq 1]} \;=\; \frac{P[X=3]}{1-P[X=0]} \;=\; \frac{\frac{1}{35}}{1-\frac{4}{35}} \;=\; \frac{1}{31}.$$

(ii) Wir definieren das Ereignis

$$A \;=\; \text{Die Zahl 4 ist in der ausgewählten Teilmenge enthalten.}$$

Wir haben

$$P[A] \;=\; \frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{3}} \;=\; \frac{\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}}{35} \;=\; \frac{15}{35},$$

und somit erhalten wir

$$P[X=3|A] \;=\; \frac{P[\{X=3\}\cap A]}{P[A]} \;=\; \frac{P[X=3]}{P[A]} \;=\; \frac{\frac{1}{35}}{\frac{15}{35}} \;=\; \frac{1}{15}.$$

b) (3 Punkte) Der Zufallsvektor (X, Y) kann die Werte $(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ annehmen. Daraus folgt, dass die Zufallsvariable $U = \frac{X\cdot Y}{2}$ genau die Werte aus der Menge

$$\left\{\frac{0\cdot 3}{2}, \frac{1\cdot 2}{2}, \frac{2\cdot 1}{2}, \frac{3\cdot 0}{2}\right\} \;=\; \{0, 1\}$$

annehmen kann. Da Y durch X bestimmt ist $(Y = 3-X)$, reicht es, nur die Werte von X zu betrachten, um die Verteilung von $U = \frac{X\cdot Y}{2}$ zu bestimmen. Wir haben

$$P[U=0] \;=\; P[\{X=0\}\cup\{X=3\}] \;=\; P[X=0]+P[X=3] \;=\; \frac{4}{35}+\frac{1}{35} \;=\; \frac{1}{7}.$$

Bitte wenden!

Die Verteilungsfunktion F_U von U ist daher gegeben durch

$$F_U(u) \;=\; \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \frac{1}{7}, & 0 \le u < 1, \\ 1, & 1 \le u. \end{cases}$$

c) (4 Punkte) Wir definieren das Ereignis

$$B \;=\; \text{Genau zwei gerade Zahlen in der ausgewählten Teilmenge.}$$

Ausserdem definieren wir die beiden Ereignisse

$$\begin{aligned} C_0 &= \text{Die Zahl } Z \text{ ist gerade.} \\ C_1 &= \text{Die Zahl } Z \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel von Bayes schreiben wir

$$P[C_0|B] \;=\; \frac{P[B|C_0] \cdot P[C_0]}{P[B|C_0] \cdot P[C_0] + P[B|C_1] \cdot P[C_1]}.$$

Wir haben

$$P[C_0] \;=\; \frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad P[C_1] \;=\; \frac{1}{3},$$

sowie

$$P[B|C_0] \;=\; \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} \;=\; \frac{\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} \cdot 4}{\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}} \;=\; \frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 8} \;=\; \frac{24}{56} \quad \left(= \frac{3}{7}\right)$$

und

$$P[B|C_1] \;=\; \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} \;=\; \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 8} \;=\; \frac{15}{56}.$$

Wir erhalten

$$P[C_0|B] \;=\; \frac{\frac{24}{56} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{24}{56} \cdot \frac{2}{3} + \frac{15}{56} \cdot \frac{1}{3}} \;=\; \frac{24 \cdot 2}{24 \cdot 2 + 15 \cdot 1} \;=\; \frac{48}{63} \;=\; \frac{16}{21}.$$

2. a) (3 Punkte) Wir definieren das Ereignis

$$D \;=\; \text{Genau eines der ersten beiden Dokumente hat keine Druckfehler.}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} P[D] &= P[\{N_1 = 0, N_2 \ge 1\} \cup \{N_1 \ge 1, N_2 = 0\}] \\ &= P[N_1 = 0, N_2 \ge 1] + P[N_1 \ge 1, N_2 = 0]. \end{aligned}$$

Indem wir die Unabhängigkeit von N_1 und N_2 verwenden, bekommen wir

$$\begin{aligned} P[D] &= P[N_1 = 0] \cdot P[N_2 \ge 1] + P[N_1 \ge 1] \cdot P[N_2 = 0] \\ &= P[N_1 = 0] \cdot (1 - P[N_2 = 0]) + (1 - P[N_1 = 0]) \cdot P[N_2 = 0] \\ &= P[N_1 = 0] + P[N_2 = 0] - 2 \cdot P[N_1 = 0] \cdot P[N_2 = 0]. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir haben

$$P[N_1 = 0] \;=\; e^{-\lambda} \qquad \text{und} \qquad P[N_2 = 0] \;=\; e^{-2\lambda}.$$

Es folgt

$$P[D] \;=\; e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} - 2e^{-\lambda}e^{-2\lambda} \;=\; e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} - 2e^{-3\lambda}.$$

b) **(3 Punkte)** Wir verwenden in dieser Aufgabe, dass der Parameter einer Poissonverteilung zugleich auch deren Erwartungswert sowie Varianz ist. Mit der Linearität des Erwartungswerts bekommen wir

$$E[T] \;=\; E[N_1 + N_2 + N_3] \;=\; E[N_1] + E[N_2] + E[N_3] \;=\; \lambda + 2\lambda + 2\lambda \;=\; 5\lambda.$$

Mit der Unabhängigkeit von N_1, N_2 und N_3 erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(T - 2N_2) \;&=\; \mathrm{Var}\,(N_1 - N_2 + N_3) \;=\; \mathrm{Var}\,(N_1) + \mathrm{Var}\,(-N_2) + \mathrm{Var}\,(N_3)\\ &=\; \mathrm{Var}\,(N_1) + (-1)^2 \cdot \mathrm{Var}\,(N_2) + \mathrm{Var}\,(N_3) \;=\; \lambda + 2\lambda + 2\lambda \;=\; 5\lambda.\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}E\left[\frac{1}{N_1+1}\right] \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot P[N_1 = k] \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \;=\; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\\ &\overset{l=k+1}{=}\; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \;=\; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} - \frac{\lambda^0}{0!}\right) \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right).\end{aligned}$$

c) **(4 Punkte)** Wir definieren die drei Ereignisse

$$\begin{aligned}E_1 \;&=\; \text{Das erste Dokument wurde ausgewählt.}\\ E_2 \;&=\; \text{Das zweite Dokument wurde ausgewählt.}\\ E_3 \;&=\; \text{Das dritte Dokument wurde ausgewählt.}\end{aligned}$$

Wir haben

$$P[E_1] \;=\; P[E_2] \;=\; P[E_3] \;=\; \frac{1}{3}.$$

Mit Hilfe des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit können wir schreiben

$$\begin{aligned}P[N = 1, T = 2] \;&=\; P[N = 1, T = 2 | E_1] \cdot P[E_1] + P[N = 1, T = 2 | E_2] \cdot P[E_2]\\ &\qquad + P[N = 1, T = 2 | E_3] \cdot P[E_3]\\ &=\; \frac{1}{3}\left(P[N_1 = 1, T = 2] + P[N_2 = 1, T = 2] + P[N_3 = 1, T = 2]\right)\\ &=\; \frac{1}{3}\left(P[N_1 = 1, N_2 + N_3 = 1] + P[N_2 = 1, N_1 + N_3 = 1]\right.\\ &\qquad \left. + P[N_3 = 1, N_1 + N_2 = 1]\right)\\ &=\; \frac{1}{3}\left(P[N_1 = 1, N_2 = 1, N_3 = 0] + P[N_1 = 1, N_2 = 0, N_3 = 1]\right.\\ &\qquad + P[N_1 = 1, N_2 = 1, N_3 = 0] + P[N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 1])\\ &\qquad \left. + P[N_1 = 1, N_2 = 0, N_3 = 1] + P[N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 1]\right).\\ &=\; \frac{2}{3}\left(P[N_1 = 1, N_2 = 1, N_3 = 0] + P[N_1 = 1, N_2 = 0, N_3 = 1]\right.\\ &\qquad \left. + P[N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 1]\right).\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Durch die Unabhängigkeit von N_1, N_2 und N_3 erhalten wir

$$\begin{aligned} P[N=1, T=2] &= \frac{2}{3}\big(P[N_1=1]\cdot P[N_2=1]\cdot P[N_3=0] \\ &\qquad + P[N_1=1]\cdot P[N_2=0]\cdot P[N_3=1] \\ &\qquad + P[N_1=0]\cdot P[N_2=1]\cdot P[N_3=1]\big)\,. \end{aligned}$$

Da

$$N_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda), \qquad N_2 \sim \mathrm{Poi}(2\lambda) \qquad \text{und} \qquad N_3 \sim \mathrm{Poi}(2\lambda),$$

haben wir

$$P[N_1=1] = \lambda e^{-\lambda}, \qquad P[N_2=1] = 2\lambda e^{-2\lambda} \qquad \text{und} \qquad P[N_3=1] = 2\lambda e^{-2\lambda},$$

sowie

$$P[N_1=0] = e^{-\lambda}, \qquad P[N_2=0] = e^{-2\lambda} \qquad \text{und} \qquad P[N_3=0] = e^{-2\lambda}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} P[N=1, T=2] &= \frac{2}{3}\Big(\lambda e^{-\lambda}\cdot 2\lambda e^{-2\lambda}\cdot e^{-2\lambda} + \lambda e^{-\lambda}\cdot e^{-2\lambda}\cdot 2\lambda e^{-2\lambda} \\ &\qquad + e^{-\lambda}\cdot 2\lambda e^{-2\lambda}\cdot 2\lambda e^{-2\lambda}\Big) \\ &= \frac{16}{3}\lambda^2 e^{-5\lambda}. \end{aligned}$$

3. a) (3 Punkte) Die Likelihoodfunktion $L(\mu; R_1, \ldots, R_n)$ ist gegeben durch

$$L(\mu; R_1, \ldots, R_n) = \prod_{i=1}^{n} f_R(R_i|\mu) = \prod_{i=1}^{n} (\mu-1) R_i^{-\mu} = (\mu-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} R_i\right)^{-\mu}.$$

Die Log-Likelihoodfunktion $l(\mu; R_1, \ldots, R_n)$ ist dann

$$l(\mu; R_1, \ldots, R_n) = \log(L(\mu; R_1, \ldots, R_n)) = n\log(\mu-1) - \mu\sum_{i=1}^{n}\log(R_i).$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\mu}^{\mathrm{MLE}}$ ist definiert durch

$$\widehat{\mu}^{\mathrm{MLE}} = \arg\max_{\mu>1}\{L(\mu; R_1, \ldots, R_n)\} = \arg\max_{\mu>1}\{l(\mu; R_1, \ldots, R_n)\}.$$

Um $l(\mu; X_1, \ldots, X_n)$ zu maximieren, leiten wir nach μ ab und setzen die Ableitung gleich 0. Wir haben

$$\frac{\partial}{\partial\mu} l(\mu; R_1, \ldots, R_n) = \frac{n}{\mu-1} - \sum_{i=1}^{n}\log(R_i) \stackrel{!}{=} 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir lösen nun obige Gleichung nach μ auf. Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\mu}^{\text{MLE}}$ ist dann

$$\widehat{\mu}^{\text{MLE}} \;=\; 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(R_i)}.$$

Man beachte, dass $\widehat{\mu}^{\text{MLE}}$ strikt grösser als 1 ist.

Bemerkung: Für die zweite Ableitung der Log-Likelihoodfunktion $l(\mu; R_1, \ldots, R_n)$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} l(\mu; R_1, \ldots, R_n) \;=\; \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{n}{\mu - 1} - \sum_{i=1}^n \log(R_i)\right) \;=\; -\frac{n}{(\mu-1)^2} \;<\; 0.$$

Die Funktion $l(\cdot; R_1, \ldots, R_n)$ ist also strikt konkav für $\mu > 1$ und nimmt daher tatsächlich im Punkt $\widehat{\mu}^{MLE}$ ihr Maximum an.

b) (3 Punkte) Die Grundfläche A und das Volumen V des Zylinders sind gegeben durch $A = \pi R^2$ und $V = \pi R^2 H$. Da H und R unabhängig sind, haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(A, V) &= E[AV] - E[A]E[V] \;=\; E[\pi R^2 \pi R^2 H] - E[\pi R^2]E[\pi R^2 H] \\ &= \pi^2 E[H]E[R^4] - \pi^2 E[H]E[R^2]E[R^2] \\ &= \pi^2 E[H]\left(E[R^4] - E[R^2]E[R^2]\right). \end{aligned}$$

H ist uniformverteilt auf $[0, 1]$. Es folgt $E[H] = \frac{1}{2}$. Für das zweite und vierte Moment von R berechnen wir

$$E[R^2] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \cdot f_R(r|\mu = 7)\, dr \;=\; \int_1^{\infty} r^2 \cdot 6 r^{-7}\, dr \;=\; 6\left[-\frac{1}{4} r^{-4}\right]_1^{\infty} \;=\; 6 \cdot \frac{1}{4} \;=\; \frac{3}{2}$$

und

$$E[R^4] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} r^4 \cdot f_R(r|\mu = 7)\, dr \;=\; \int_1^{\infty} r^4 \cdot 6 r^{-7}\, dr \;=\; 6\left[-\frac{1}{2} r^{-2}\right]_1^{\infty} \;=\; 6 \cdot \frac{1}{2} \;=\; 3.$$

Wir bekommen

$$\operatorname{Cov}(A, V) \;=\; \pi^2 \frac{1}{2}\left(3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) \;=\; \frac{3}{8}\pi^2.$$

c) (4 Punkte) Wir haben

$$\begin{aligned} P[A \le 2\pi] &= P[\pi R^2 \le 2\pi] \;=\; P[R^2 \le 2] \;=\; P\left[-\sqrt{2} \le R \le \sqrt{2}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r|\mu = 7) \cdot 1_{\{-\sqrt{2} \le r \le \sqrt{2}\}}\, dr \;=\; \int_1^{\sqrt{2}} 6 r^{-7}\, dr \;=\; \left[-r^{-6}\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 1 - 2^{-3} \;=\; \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} P[V \leq \pi/2] &= P[\pi R^2 H \leq \pi/2] \;=\; P\left[R^2 H \leq 1/2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r|\mu = 7) \cdot 1_{\{0 \leq h \leq 1\}} \cdot 1_{\{r^2 h \leq 1/2\}} \, dr dh \\ &= \int_0^1 \int_1^{\infty} 6r^{-7} \cdot 1_{\left\{r \leq \sqrt{1/(2h)}\right\}} \, dr dh. \end{aligned}$$

Dieses Integral ist gleich 0 falls

$$1 \;>\; \sqrt{1/(2h)},$$

was gleichbedeutend ist mit $h > 1/2$. Wir müssen also nur den Bereich $h \leq 1/2$ berücksichtigen. Wir bekommen

$$\begin{aligned} P[V \leq \pi/2] &= \int_0^{1/2} \int_1^{\sqrt{1/(2h)}} 6r^{-7} \, dr dh \;=\; \int_0^{1/2} \left[-r^{-6}\right]_1^{\sqrt{1/(2h)}} \, dh \\ &= \int_0^{1/2} 1 - \left(\frac{1}{2h}\right)^{-3} \, dh \\ &= \frac{1}{2} - 2^3 \int_0^{1/2} h^3 \, dh \;=\; \frac{1}{2} - 2^3 \left[\frac{1}{4} h^4\right]_0^{1/2} \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} \;=\; \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Alternative Berechnung von $P[V \leq \pi/2]$:

$$\begin{aligned} P[V \leq \pi/2] &= P[\pi R^2 H \leq \pi/2] \;=\; P\left[R^2 H \leq 1/2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r|\mu = 7) \cdot 1_{\{0 \leq h \leq 1\}} \cdot 1_{\{r^2 h \leq 1/2\}} \, dh dr \\ &= \int_1^{\infty} \int_0^1 6r^{-7} \cdot 1_{\{h \leq 1/(2r^2)\}} \, dh dr. \end{aligned}$$

Da wir nur $r \geq 1$ betrachten, ist $0 < 1/(2r^2) \leq 1/2 < 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} P[V \leq \pi/2] &= \int_1^{\infty} \int_0^{1/(2r^2)} 6r^{-7} \, dh dr \;=\; \int_1^{\infty} \frac{1}{2r^2} 6r^{-7} \, dr \;=\; 3 \int_1^{\infty} r^{-9} \, dr \\ &= 3 \left[-\frac{1}{8} r^{-8}\right]_1^{\infty} \;=\; \frac{3}{8}. \end{aligned}$$