Prof. Dr. A.-S. Sznitman ETH Zürich Winter 2019

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

Bitte ausfüllen!

Name	
Vorname	
Legi-Nr.	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		

Punktesumme	
Kontrolle	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

- **Bitte** ...
  - Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
  - Tragen Sie Ihre Daten in das Deckblatt ein.
  - Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
  - Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
  - Verwenden Sie keinen Tipp-Ex oder Ähnliches.
  - Verwenden Sie **keinen roten oder grünen Stift** und auch **keinen Bleistift**.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte sowie Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 5 beidseitig von Hand beschriebene A4-Blätter, kein Taschenrechner.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) Aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ wird zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) eine Teilmenge mit drei Elementen ausgewählt. Sei X die Anzahl gerader Zahlen und Y die Anzahl ungerader Zahlen in dieser ausgewählten Teilmenge.

a) (i) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Teilmenge nur aus geraden Zahlen besteht, gegeben, dass sie mindestens eine gerade Zahl enthält.

(ii) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Teilmenge nur aus geraden Zahlen besteht, gegeben, dass sie die Zahl 4 enthält.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_U der Zufallsvariablen $U = \frac{X \cdot Y}{2}$.

c) Aus der Menge $\{8, 9, 10\}$ wird zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) eine Zahl Z ausgewählt. Wir fügen diese Zahl Z zur Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ hinzu. Aus der neuen Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Z\}$ wird dann wieder zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) eine Teilmenge mit drei Elementen ausgewählt. Angenommen, es befinden sich genau zwei gerade Zahlen in dieser ausgewählten Teilmenge, was ist dann die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl Z gerade ist?

2. (10 Punkte) Angenommen, wir haben drei Dokumente. Es bezeichnen N_1, N_2 bzw. N_3 die jeweilige Anzahl Druckfehler im ersten, zweiten bzw. dritten Dokument. Sei $\lambda > 0$. Wir nehmen an, dass N_1, N_2 und N_3 unabhängig und poissonverteilt sind, mit Parametern λ (für N_1), 2λ (für N_2) und 2λ (für N_3).

a) Wir betrachten zuerst nur das erste und das zweite Dokument. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eines dieser beiden Dokumente keine Druckfehler hat.

b) Wir betrachten nun alle drei Dokumente. Es sei T die totale Anzahl Druckfehler in allen drei Dokumenten zusammen. Berechnen Sie $E[T]$, $\mathrm{Var}(T - 2N_2)$ sowie $E[\frac{1}{N_1+1}]$.
Hinweis: Für eine poissonverteilte Zufallsvariable X mit Parameter $\alpha > 0$ gilt: $E[X] = \mathrm{Var}(X) = \alpha$.

c) Von den drei Dokumenten wird nun eines zufällig ausgewählt. Sei N die Anzahl Druckfehler im zufällig ausgewählten Dokument. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $N = 1$ und $T = 2$ ist.

Bitte wenden!

3. (10 Punkte) Wir betrachten einen Zylinder der Höhe H mit einem Kreis mit Radius R als Basis, wobei H und R unabhängige Zufallsvariablen sind. Wir nehmen an, dass H gleichverteilt auf $[0, 1]$ ist, und R die Dichte

$$f_R(r|\mu) = \begin{cases} (\mu - 1)\, r^{-\mu}, & r \geq 1, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

hat, wobei $\mu > 1$ ein unbekannter Parameter ist.

a) Seien $R_1, R_2, \ldots, R_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilung wie R. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für μ.

Wir wählen nun $\mu = 7$. Weiter sei A die Grundfläche und V das Volumen des Zylinders.

b) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(A, V)$.

c) Berechnen Sie $P[A \leq 2\pi]$ und $P[V \leq \pi/2]$.