Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. a) (4 Punkte) Sei U_A das Ereignis, dass Urne A gewählt wurde und U_B das Ereignis, dass Urne B gewählt wurde. Nach Bayes gilt

$$\mathbb{P}(U_A \mid R = i) = \frac{\mathbb{P}(R = i \mid U_A)\mathbb{P}(U_A)}{\mathbb{P}(R = i \mid U_A)\mathbb{P}(U_A) + \mathbb{P}(R = i \mid U_B)\mathbb{P}(U_B)} .$$

Nach Annahme, $\mathbb{P}(U_A) = \mathbb{P}(U_B) = 1/2$. Zunächst für $i = 1$, $\mathbb{P}(R = 1 \mid U_A) = 2 \cdot 2/3 \cdot 1/3 = 4/9$ und $\mathbb{P}(R = 1 \mid U_B) = 2 \cdot 1/3 \cdot 2/3 = 4/9$, also

$$\mathbb{P}(U_A \mid R = 1) = \frac{4/9 \cdot 1/2}{4/9 \cdot 1/2 + 4/9 \cdot 1/2} = 1/2 .$$

Für $i = 2$, $\mathbb{P}(R = 2 \mid U_A) = 2/3 \cdot 2/3 = 4/9$ und $\mathbb{P}(R = 2 \mid U_B) = 1/3 \cdot 1/3 = 1/9$ und somit

$$\mathbb{P}(U_A \mid R = 2) = \frac{4/9 \cdot 1/2}{4/9 \cdot 1/2 + 1/9 \cdot 1/2} = 4/5 .$$

b) (3 Punkte) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R) &= \mathbb{P}(R = 1) + 2\,\mathbb{P}(R = 2) \\ &= \mathbb{P}(R = 1 \mid U_A)\mathbb{P}(U_A) + \mathbb{P}(R = 1 \mid U_B)\mathbb{P}(U_B) \\ &\quad + 2\,\mathbb{P}(R = 2 \mid U_A)\mathbb{P}(U_A) + 2\,\mathbb{P}(R = 2 \mid U_B)\mathbb{P}(U_B)\end{aligned}$$

Mittels der Ergebnisse aus Teilaufgabe (a) erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R) &= 4/9 \cdot 1/2 + 4/9 \cdot 1/2 + 2 \cdot 4/9 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/9 \cdot 1/2 \\ &= 2/9 + 2/9 + 4/9 + 1/9 = 1 .\end{aligned}$$

Da $\min\{R, S\} \in \{0, 1\}$ gilt, können wir für den zweiten Teil

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\min\{R, S\}) &= \mathbb{P}(\min\{R, S\} = 1) = \mathbb{P}(R = S = 1) = \mathbb{P}(R = 1) \\ &= \mathbb{P}(R = 1 \mid U_A)\mathbb{P}(U_A) + \mathbb{P}(R = 1 \mid U_B)\mathbb{P}(U_B)\end{aligned}$$

schreiben. Wir haben bereits $\mathbb{P}(R = 1 \mid U_A) = \mathbb{P}(R = 1 \mid U_B) = 4/9$ berechnet, also ist $\mathbb{E}(\min\{R, S\}) = 4/9 \cdot 1/2 + 4/9 \cdot 1/2 = 4/9$.

Bitte wenden!

c) (3 Punkte) Zunächst für $i = 1$, $\mathbb{P}(R = 1 \mid U_A) = 2/3 \cdot 1/2 + 1/3 = 2/3$ und $\mathbb{P}(R = 1 \mid U_B) = 1/3 + 2/3 \cdot 1/2 = 2/3$, also nach Bayes,

$$\mathbb{P}(U_A \mid R = 1) = \frac{2/3 \cdot 1/2}{2/3 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 1/2} = 1/2 \; .$$

Für $i = 2$ gilt $\mathbb{P}(R = 2 \mid U_B) = 0$ (und $\mathbb{P}(R = 2 \mid U_A) = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3$) und daher $\mathbb{P}(U_A \mid R = 2) = 1$.

2. a) (3 Punkte) Per Definition ist

$$\mathbb{E}(N_1) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-1} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-1} \frac{1}{n!} = e^{-1} \cdot e = 1 \; .$$

Für den zweiten Teil berechnen wir zunächst $\mathbb{E}(N_1^2)$ wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_1^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot e^{-1} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-1} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot e^{-1} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1} \frac{1}{(n-1)!} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-1} \frac{1}{n!} + 1 = 2 \; . \end{aligned}$$

Daher erhalten wir $\mathrm{Var}(N_1) = \mathbb{E}(N_1^2) - \mathbb{E}(N_1)^2 = 2 - 1 = 1$.

b) (4 Punkte) Es gilt

$$\mathbb{P}(N_1 = l \mid N = k) = \frac{\mathbb{P}(N_1 = l, N = k)}{\mathbb{P}(N = k)} = \frac{\mathbb{P}(N_1 = l, N_2 = k - l)}{\mathbb{P}(N = k)} \; .$$

Da N_1 und N_2 nach Annahme unabhängig sind, gilt für alle $i, j \geq 0$,

$$\mathbb{P}(N_1 = i, N_2 = j) = \mathbb{P}(N_1 = i)\mathbb{P}(N_2 = j) = e^{-1} \frac{1}{i!} \cdot e^{-4} \frac{4^j}{j!} \; .$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(N_1 = i, N_2 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-5} \frac{4^{k-i}}{i!(k-i)!} \\ &= e^{-5} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 4^{k-i} = e^{-5} \frac{5^k}{k!} \; . \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\mathbb{P}(N_1 = l \mid N = k) = \frac{e^{-1}/l! \cdot e^{-4} 4^{k-l}/(k-l)!}{e^{-5} 5^k / k!} = \binom{k}{l} (1/5)^l (4/5)^{k-l} \; .$$

Siehe nächstes Blatt!

c) **(3 Punkte)** Natürlich ist $F_S(s) = 0$ für $s < 0$. Sei nun also $s \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
F_S(s) = \mathbb{P}(S \leq s) = \mathbb{P}(S_1 + S_2 \leq s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s_1+s_2)}\, 1(s_1 + s_2 \leq s)\, ds_2\, ds_1 \\
&= \int_0^s e^{-s_1} \int_0^{s-s_1} e^{-s_2}\, ds_2\, ds_1 = \int_0^s e^{-s_1}(1 - e^{-(s-s_1)})\, ds_1 \\
&= \int_0^s e^{-s_1}\, ds_1 - \int_0^s e^{-s}\, ds_1 = 1 - e^{-s} - se^{-s}\,.
\end{aligned}$$

Differenzieren ergibt $f_S(s) = se^{-s}\, 1(s \geq 0)$.

3. **a)** **(3 Punkte)** Natürlich ist $F_R(r) = 0$ für $r < 1/2$ und $F_R(r) = 1$ für $r \geq 1$. Sei nun also $r \in [1/2, 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
F_R(r) = \mathbb{P}(R \leq r) &= \int_D \frac{4}{3\pi} 1(x^2 + y^2 \leq r^2)\, dxdy \\
&= \frac{4}{3\pi}\left(\pi r^2 - \pi(1/2)^2\right) = (4r^2 - 1)/3\,.
\end{aligned}$$

Differenzieren ergibt die Dichte $f_R(r) = 8r/3 \cdot 1(r \in [1/2, 1])$. Daher gilt

$$\mathbb{E}(1/R) = \int_{1/2}^1 1/r \cdot 8r/3\, dr = \int_{1/2}^1 8/3\, dr = 4/3\,.$$

b) **(3 Punkte)** Per Definition,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)\, dy = \frac{4}{3\pi} \int_{\mathbb{R}} 1(1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1)\, dy \\
&= \frac{4}{3\pi} \int_{\mathbb{R}} 1((1/2)^2 - x^2 \leq y^2 \leq 1 - x^2)\, dy
\end{aligned}$$

Wir müssen also die Fälle $|x| > 1$, $|x| \in [1/2, 1]$ und $|x| < 1/2$ unterscheiden (dies ist auch geometrisch klar). Ist $|x| > 1$, folgt sofort $f_X(x) = 0$. Für $|x| \in [1/2, 1]$ ist

$$f_X(x) = \frac{4}{3\pi} \int_{\mathbb{R}} 1(y^2 \leq 1 - x^2)\, dy = \frac{4}{3\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{8\sqrt{1 - x^2}}{3\pi}$$

und für $|x| < 1/2$ gilt

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{4}{3\pi} \int_{\mathbb{R}} 1(\sqrt{1/4 - x^2} \leq |y| \leq \sqrt{1 - x^2})\, dy \\
&= \frac{8(\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1/4 - x^2})}{3\pi}\,.
\end{aligned}$$

c) **(4 Punkte)** Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2 \max\{|u|, |v|\})^2\, dv\, du = 4 \cdot \int_0^1 \int_0^1 (\max\{u, v\})^2\, dv\, du \\
&= 8 \int_0^1 \int_0^u (\max\{u, v\})^2, dv\, du = 8 \int_0^1 \int_0^u u^2\, dv\, du = 8 \int_0^1 u^3\, du = 2
\end{aligned}$$

wobei wir für die zweite und dritte Gleichung die Symmetrie des Problems benutzt haben.