

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

Bitte ausfüllen!

Name	
Vorname	
Legi-Nr.	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		

Punktesumme	
Kontrolle	

Bitte wenden!

Wichtige Hinweise zur Prüfung

- **Bitte ...**
 - Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
 - Tragen Sie Ihre Daten in das Deckblatt ein.
 - Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
 - Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
 - Verwenden Sie keinen Tipp-Ex oder Ähnliches.
 - Verwenden Sie **keinen roten oder grünen Stift** und auch **keinen Bleistift**.
- Um die volle Punktzahl zu erreichen, schreiben Sie stets **alle Zwischenschritte** sowie **Begründungen** auf und vereinfachen Sie die Resultate so weit wie möglich.
- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 5 beidseitig von Hand beschriebene A4-Blätter, kein Taschenrechner.

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. (10 Punkte) In einer Urne A sind 2 rote und 1 schwarze Kugel; in einer zweiten Urne B sind 1 rote und 2 schwarze Kugeln. Nun wird eine der beiden Urnen zufällig (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$) gewählt und 2 Kugeln *mit Zurücklegen* aus dieser Urne gezogen. Sei dann R die Anzahl der gezogenen roten Kugeln und S die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
 - a) Bestimmen Sie für $i = 1$ und für $i = 2$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Urne A gewählt wurde, gegeben dass $R = i$ gilt.
 - b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(R)$ und $\mathbb{E}(\min\{R, S\})$.
 - c) Wir ändern nun das Verfahren: Nachdem die Urne wie zuvor gewählt wurde, werden jetzt 2 Kugeln *ohne Zurücklegen* gewählt und wir definieren R und S wie zuvor. Beantworten Sie nun (a) in diesem Fall.

2. (10 Punkte) Sei N_1 und N_2 die respektive Anzahl von Kunden in zwei Schlangen vor zwei Bahnschaltern. Wir nehmen an, dass N_1 und N_2 unabhängig und Poissonverteilt mit jeweiligen Parametern 1 und 4 sind. Ferner sei $N = N_1 + N_2$ die Anzahl von Kunden in beiden Schlangen zusammen.
 - a) Berechnen Sie *explizit* $\mathbb{E}(N_1)$ und $\text{Var}(N_1)$.
 - b) Sei $0 \leq l \leq k$. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(N_1 = l \mid N = k)$.
 - c) Die ersten zwei Kunden in Schlange 1 benötigen jeweils Zeit S_1 und S_2 am Schalter; wir nehmen an, dass S_1 und S_2 unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter 1 sind. Was ist die Verteilungs- und Dichtefunktion von $S = S_1 + S_2$?

Bitte wenden!

- 3. (10 Punkte)** Wir wählen (uniform) zufällig einen Punkt $A = (X, Y)$ in dem Gebiet $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. Die gemeinsame Dichte von (X, Y) ist dann

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4/(3\pi) & : (x, y) \in D \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

- a) Sei R der Abstand von A zum Ursprung $(0, 0)$. Finden Sie die Verteilungs- und Dichtefunktion von R . Berechnen Sie $\mathbb{E}(1/R)$.
- b) Berechnen Sie die Randdichte von X . Unterscheiden Sie hierzu für die Berechnung von $f_X(x)$ die Fälle $|x| > 1$, $|x| \in [1/2, 1]$ und $|x| < 1/2$.
- c) Wir ändern nun das Setup: Sei $Q = [-1, 1]^2$ und sei $B = (U, V)$ uniform zufällig in dem Gebiet Q gewählt. Sei des Weiteren $S = (2 \max\{|U|, |V|\})^2$ die Fläche des Quadrats welches seinen Mittelpunkt im Ursprung $(0, 0)$ hat und bei welchem der Punkt B auf einer der Seitenkanten liegt. Berechnen Sie $\mathbb{E}(S)$.