Musterlösung zur Prüfung
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET), Sommer 08,
Prof. Dr. A.-S. Sznitman

1. a) (X, Y) kann die Werte $(2,0)$, $(1,1)$ oder $(0,2)$ annehmen. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten dieser drei Ereignisse verwenden wir den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit. Seien U_1 und U_2 die Ereignisse "Urne 1 wird gewählt" und "Urne 2 wird gewählt". Dann gilt

$$\begin{aligned} P[X=2, Y=0] &= P[X=2, Y=0 | U_1] P[U_1] \\ &\quad + P[X=2, Y=0 | U_2] P[U_2]. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit eine rote bzw. eine blaue Kugel zu ziehen ist unter der Bedingung U_1 gleich $1/4$ bzw. $3/4$, unter der Bedingung U_2 je $1/2$. Da die sukzessiven Ziehungen unabhängig sind, erhalten wir daher aus (1),

$$P[X=2, Y=0] = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{5}{32}.$$

Analog gilt mit (1),

$$\begin{aligned} P[X=1, Y=1] &= P[X=1, Y=1 | U_1] P[U_1] + P[X=1, Y=1 | U_2] P[U_2] \\ &= \left(\frac{1}{4}\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\frac{1}{2} = \frac{7}{16}, \end{aligned}$$

sowie

$$P[X=0, Y=2] = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{13}{32}.$$

Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) ist daher

$$\frac{5}{32}\delta_{(2,0)} + \frac{7}{16}\delta_{(1,1)} + \frac{13}{32}\delta_{(0,2)}. \tag{2}$$

Die Verteilungsfunktion F_X von X ist definiert durch $F_X(x) = P[X \leq x]$, somit gilt

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 13/32 & 0 \leq x < 1 \\ 27/32 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

b) Das Ereignis "die beiden gezogenen Kugeln haben dieselbe Farbe" ist die disjunkte Vereinigung der Ereignisse $\{X=2, Y=0\}$ und $\{X=0, Y=2\}$. Daher erhält man mit (2),

$$\begin{aligned} P[\text{Kugeln haben dies. Farbe}] &= P[X=2, Y=0] + P[X=0, Y=2] \\ &= \frac{5}{32} + \frac{13}{32} = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Sei $V = \{X = Y = 1\}$ das Ereignis "die beiden Kugeln haben verschiedene Farben". Dann folgt aus dem Satz von Bayes,

$$P[U_1|V] = \frac{P[U_1]P[X = Y = 1|U_1]}{P[X = Y = 1]} = \frac{\frac{1}{2}(2\frac{1}{4}\frac{3}{4})}{\frac{14}{32}} = \frac{3}{7}.$$

c) Wiederum verwenden wir den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und erhalten

$$\begin{aligned}
P[X = 2, Y = 0] &= 0 \text{ (nur eine rote Kugel in jeder Urne)}, \\
P[X = 1, Y = 1] &= P[X = 1, Y = 1|U_1]P[U_1] + P[X = 1, Y = 1|U_2]P[U_2] \\
&= \left(\frac{1}{4}\frac{3}{3} + \frac{3}{4}\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \\
P[X = 0, Y = 2] &= P[X = 0, Y = 2|U_1]P[U_1] + P[X = 0, Y = 2|U_2]P[U_2] \\
&= \left(\frac{3}{4}\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} = \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

und haben somit die gemeinsame Verteilung von (X, Y) als

$$\frac{3}{4}\delta_{(1,1)} + \frac{1}{4}\delta_{(0,2)}$$

bestimmt. Ausserdem gilt mit V wie oben,

$$P[U_1|V] = \frac{P[U_1]P[V|U_1]}{P[X = Y = 1]} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\frac{3}{3} + \frac{3}{4}\frac{1}{3})}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

2. a) X_1, X_2 und X sind Binomialverteilt mit Parametern $n = N_1$, N_2 und N_1+N_2 und $p = 1/4$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
E[X_1] &= N_1 p = 2(1/4) = 1/2, \\
E[X_2] &= N_2 p = 10(1/4) = 5/2, \text{ und} \\
E[X] &= E[X_1] + E[X_2] = 3,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\text{var}(X_1) &= N_1 pq = 2(1/4)(3/4) = 3/8, \\
\text{var}(X_2) &= N_2 pq = 10(1/4)(3/4) = 15/8, \\
\text{var}(X) &= (N_1 + N_2)pq = 12(1/4)(3/4) = 9/4.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

b)

$$
\begin{aligned}
P[X_1 = 1 | X = 1] &= \frac{P[X_1 = 1, X = 1]}{P[X = 1]} \\
&= \frac{P[X_1 = 1, X_2 = 0]}{P[X = 1]} \\
&\overset{(X_1,\, X_2 \text{ unabh.})}{=} \frac{P[X_1 = 1]P[X_2 = 0]}{P[X = 1]} \\
&= \frac{(2pq)(q^{10})}{12pq^{11}} = \frac{1}{6}, \\
P[X_1 \geq 1 | X = 2] &= \frac{P[X_1 \geq 1, X = 2]}{P[X = 2]} \\
&= \frac{P[\{X_1 = 1, X_2 = 1\} \cup \{X_1 = 2, X_2 = 0\}]}{P[X = 2]} \\
&\overset{(\text{Ereignisse disj.})}{=} \frac{P[X_1 = 1, X_2 = 1] + P[X_1 = 2, X_2 = 0]}{P[X = 2]} \\
&\overset{(X_1,\, X_2 \text{ unabh.})}{=} \frac{P[X_1 = 1]P[X_2 = 1] + P[X_1 = 2]P[X_2 = 0]}{P[X = 2]} \\
&= \frac{(2pq)(10pq^9) + (p^2)(q^{10})}{\binom{12}{2} p^2 q^{10}} \\
&= \frac{21(2!10!)}{12!} = \frac{7}{22}.
\end{aligned}
$$

c) Die beste lineare Prognose von X_i durch X, $i = 1, 2$, ist gegeben durch

$$
Z_i = \frac{\operatorname{cov}(X_i, X)}{\operatorname{var}(X)}(X - E[X]) + E[X_i]. \tag{3}
$$

Wir berechnen also

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_2, X) &= E[XX_2] - E[X]E[X_2] \\
&= E[(X_1 + X_2)X_2] - E[X_1 + X_2]E[X_2] \\
&= E[X_1X_2] + E[X_2^2] - E[X_1]E[X_2] - E[X_2]^2 \\
&\overset{(X_1,\, X_2 \text{ unabh.})}{=} E[X_1]E[X_2] + E[X_2^2] - E[X_1]E[X_2] - E[X_2]^2 \\
&= E[X_2^2] - E[X_2]^2 = \operatorname{var}(X_2) = \frac{15}{8},
\end{aligned} \tag{4}
$$

und erhalten durch Einsetzen in (3), die beste lineare Prognose von X_2 durch X:

$$
\frac{15 \times 4}{8 \times 9}(X - 3) + \frac{5}{2} = \frac{5}{6}X.
$$

Bitte wenden!

Analog wie in (4) erhalten wir $\mathrm{cov}(X_1, X) = \mathrm{var}(X_1) = 3/8$, und bestimmen somit die beste lineare Prognose von X_1 durch X als

$$\frac{3 \times 4}{8 \times 9}(X - 3) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}X.$$

3. **a)** Wir setzen $\int f = 1$,

$$\int_0^\infty \frac{c}{(1+x)^5} dx = c\Big(-\frac{1}{4}(1+x)^{-4}\Big)_0^\infty = \frac{c}{4} = 1,$$

und bestimmen so $c = 4$.

Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F_X(x) = P[X \leq x] &= \int_{-\infty}^x f(y) dy \\ &= 0 \text{ für } x < 0. \\ &= \int_0^x \frac{4}{(1+y)^5} dy = \big(-(1+y)^{-4}\big)_0^x = 1 - \frac{1}{(1+x)^4}, \text{ für } x \geq 0. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} E[1+X] &= \int_0^\infty \frac{4}{(1+x)^4} dx = 4\Big(-\frac{1}{3}(1+x)^{-3}\Big)_0^\infty = \frac{4}{3}, \\ E[(1+X)^2] &= \int_0^\infty \frac{4}{(1+x)^3} dx = 4\Big(-\frac{1}{2}(1+x)^{-2}\Big)_0^\infty = 2. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} E[X] &= E[1+X] - 1 = \frac{1}{3}, \text{ und} \\ E[X^2] &= E[(1+X)^2] - 2E[X] - 1 = 2 - \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

c) Für $y < 1$ gilt für die Verteilungsfunktion F_Y von Y,

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[e^X \leq y] \leq P[e^X < 1] = P[X < 0] = 0.$$

Für $y \geq 1$ erhält man

$$F_Y(y) = P[e^X \leq y] = P[X \leq \log y] = F_X(\log y) = 1 - \frac{1}{(1 + \log y)^4}.$$

Durch Differenzieren der Verteilungsfunktion erhalten wir die Dichte f_Y von Y:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } y < 1, \\ \frac{4}{y(1+\log y)^5} & \text{für } 1 \leq y. \end{cases} \end{aligned}$$