

## Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

- **Bitte ...**

- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Tragen Sie Ihre Daten in dieses Deckblatt ein, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Schreiben Sie stets alle **Zwischenschritte und -rechnungen** sowie **Begründungen** auf.

- Es dürfen sich nur erlaubte Hilfsmittel auf dem Tisch befinden, d.h. 5 beidseitig von Hand beschriebene A4-Blätter.

- Hinweis: Jede Aufgabe und Teilaufgabe hat für die Benotung gleiches Gewicht.

- **Viel Erfolg!**

<b>Name:</b>	
<b>Vorname:</b>	
Stud. Nr.:	

Das Folgende bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	1	2	3
erreichte Punkte			
Kontrolle			

Punktetotal:	
Vollständigkeit:	

## Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. Eine erste Urne enthält eine rote Kugel und drei blaue Kugeln. Eine zweite Urne enthält eine rote Kugel und eine blaue Kugel. Eine der zwei Urnen wird zufällig gewählt, wobei jede der beiden Urnen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Danach werden aus der gewählten Urne zwei Kugeln sukzessiv mit Zurücklegen gezogen. Seien  $X$  und  $Y$  die Anzahl gezogener roter und blauer Kugeln.

- Finde die gemeinsame Verteilung von  $X$  und  $Y$ . Was ist die Verteilungsfunktion von  $X$ ?
- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei gezogenen Kugeln dieselbe Farbe haben (benütze die gemeinsame Verteilung von  $X$  und  $Y$  um diese Wahrscheinlichkeit zu finden)? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Urne gewählt wurde, falls die zwei gezogenen Kugeln verschiedene Farben haben?
- Falls die Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden (anstatt mit Zurücklegen), finde die gemeinsame Verteilung von  $X$  und  $Y$ . Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Urne gewählt wurde, falls die zwei gezogenen Kugeln verschiedene Farben haben?

2. Ein Nachrichtenkanal überträgt 0-1 Bits, die unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit  $q = 3/4$  richtig und  $p = 1/4$  falsch übertragen werden. Eine erste Nachricht besteht aus  $N_1 = 2$  Bits und eine zweite Nachricht besteht aus  $N_2 = 10$  Bits. Sei  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) die Anzahl falsch übertragener Bits in der ersten (resp. zweiten) Nachricht. Sei  $X$  die totale Anzahl falsch übertragener Bits.

- Berechne den Erwartungswert und die Varianz von  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X$ .
- Falls insgesamt genau ein Bit falsch übertragen wurde, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Bit in der ersten Nachricht liegt? Falls insgesamt genau zwei Bits falsch übertragen wurden, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Bit in der ersten Nachricht falsch übertragen wurde?
- Was ist die beste lineare Prognose von  $X_2$  durch  $X$ ? Was ist die beste lineare Prognose von  $X_1$  durch  $X$ ?

3. Eine Zufallsvariable  $X$  habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x)^5}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- Finde  $c$  und die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- Finde  $E[X]$ ,  $E[X^2]$  (berechne dafür  $E[1+X]$ ,  $E[(1+X)^2]$ ).
- Was ist die Verteilungsfunktion und die Dichte von  $Y = e^X$ ?